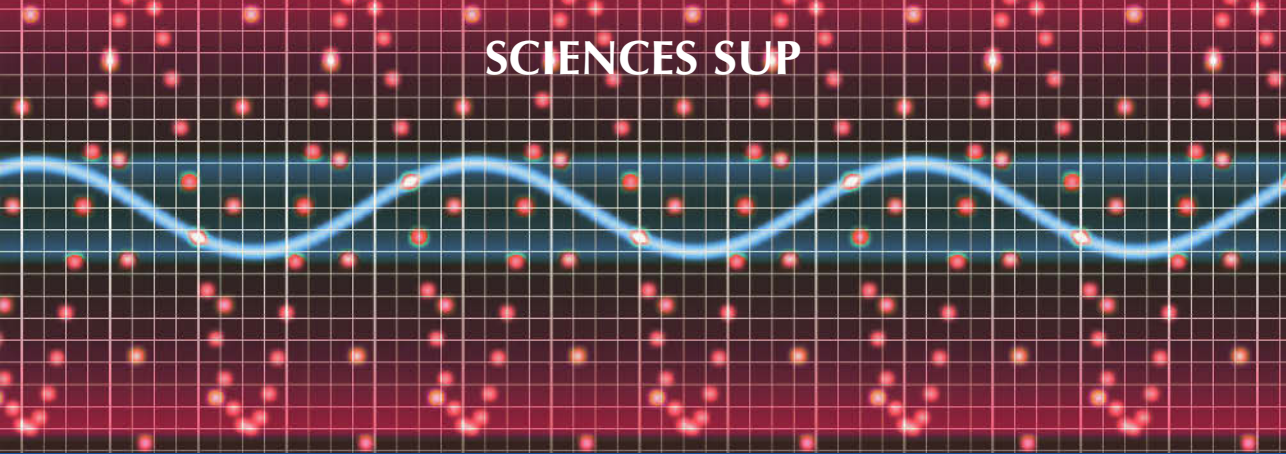




SCIENCES SUP

Cours et exercices corrigés

IUT • L3 • Master • Écoles d'ingénieurs

TRAITEMENT DES SIGNAUX ET ACQUISITION DE DONNÉES

3^e édition

Francis Cottet

DUNOD

TRAITEMENT DES SIGNAUX ET ACQUISITION DE DONNÉES

Cours et exercices corrigés

Francis Cottet

Professeur des universités
Directeur de l'École Nationale Supérieure
de Mécanique et d'Aérotechnique de Poitiers

3^e édition

DUNOD

Consultez nos parutions sur dunod.com



Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2009
ISBN 978-2-10-053985-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

INTRODUCTION	1
PARTIE 1 • LE TRAITEMENT DES SIGNAUX ANALOGIQUES	9
CHAPITRE 1 • REPRÉSENTATION DES SIGNAUX	11
1.1 Modélisation des signaux	11
1.2 Classification des signaux	12
1.2.1 Représentation temporelle des signaux	12
1.2.2 Classification énergétique	13
1.2.3 Classification spectrale	15
1.2.4 Les signaux numériques	16
CHAPITRE 2 • TRANSFORMATION DE FOURIER	19
2.1 Transformation de Fourier des fonctions périodiques. Série de Fourier	19
2.1.1 Définition. Théorème de Fourier	19
2.1.2 Distribution ou pic de Dirac	20
2.1.3 Représentations unilatérale et bilatérale	21
2.1.4 Exemples de signaux élémentaires	23
2.1.5 Propriétés du développement en série de Fourier	25
2.2 Transformée de Fourier des fonctions non périodiques	26
2.2.1 Définition	26
2.2.2 Conditions d'existence de la transformée de Fourier	27
2.2.3 Propriétés de la transformée de Fourier	27
2.2.4 Quelques signaux supplémentaires	31
Exercices d'application	34
CHAPITRE 3 • SYSTÈMES DE TRANSMISSION	45
3.1 Définition. Unité de comparaison. Bande passante	45
3.1.1 Définition et unité de comparaison	45
3.1.2 Bande passante	46

3.2	Propriétés des systèmes de transmission	47
3.2.1	Systèmes linéaires	47
3.2.2	Systèmes continus	48
3.2.3	Systèmes stationnaires	49
3.3	Filtres et convolution	49
3.3.1	Définition	49
3.3.2	Propriétés de la convolution	51
3.3.3	Calcul pratique de la convolution	51
3.3.4	Théorème de Plancherel	51
3.3.5	Convolution des signaux périodiques	54
3.4	Introduction à la notion de corrélation	54
3.4.1	Puissance et énergie des signaux	54
3.4.2	Corrélation et densité spectrale	55
3.4.3	Théorème de Parseval	60
	Exercices d'application	60
	CHAPITRE 4 • FILTRAGE DES SIGNAUX ANALOGIQUES	63
4.1	Transformée de Laplace	63
4.1.1	Définition	63
4.1.2	Transformée de Fourier et transformée de Laplace	64
4.1.3	Propriétés de la transformée de Laplace	64
4.2	Filtrage ou fenêtrage temporel	66
4.2.1	Principes généraux	66
4.2.2	Le fenêtrage temporel	66
4.3	Filtrage fréquentiel	70
4.3.1	Théorème fondamental des filtres	70
4.3.2	Filtres réalisables	72
4.3.3	Les différents types de filtres	74
	Exercices d'application	77
	CHAPITRE 5 • LA MODULATION	85
5.1	Introduction	85
5.1.1	Spectre d'un signal et bande passante d'un support	85
5.1.2	Types de transmission	87
5.1.3	Les différentes formes de modulation	87
5.2	Modulation d'amplitude	88
5.2.1	Principe de la modulation d'amplitude	88
5.2.2	Systèmes dérivés de la modulation d'amplitude	92
5.2.3	Procédés de modulation, l'émetteur	94
5.2.4	Procédés de démodulation, le récepteur	96
5.3	Modulation exponentielle	98
5.3.1	Principe de la modulation exponentielle	98
5.3.2	La modulation de fréquence	99
5.3.3	La modulation de phase	114
	Exercices d'application	117

CHAPITRE 6 • SIGNAUX ALÉATOIRES. BRUIT	125
6.1 Signaux aléatoires	125
6.1.1 Définitions	125
6.1.2 Caractérisations statistiques	126
6.2 Sources de bruit	128
6.2.1 Bruit externe et bruit interne	128
6.2.2 Bruit thermique	129
6.2.3 Bruit de grenaille et autres modèles	129
6.3 Rapport signal/bruit	130
6.4 Détection d'un signal noyé dans le bruit	131
6.4.1 Détection par corrélation d'un signal périodique noyé dans un bruit blanc	131
6.4.2 Détection synchrone par corrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit	134
Exercices d'application	136
 PARTIE 2 • LE TRAITEMENT DES SIGNAUX NUMÉRIQUES	 141
CHAPITRE 7 • NUMÉRISATION DES SIGNAUX	143
7.1 Échantillonnage	143
7.1.1 Échantillonnage idéal	145
7.1.2 Effet de repliement du spectre	149
7.1.3 Échantillonnage naturel et autres procédés	152
7.2 Quantification du signal échantillonné	156
7.2.1 Quantification	156
7.2.2 Lois de compression-expansion du signal	158
7.3 Restitution du signal	159
7.3.1 Problématique	159
7.3.2 Interpolation idéale	160
7.3.3 Interpolation linéaire	161
7.3.4 Restitution par bloqueur	163
7.3.5 Filtre de restitution	164
Exercices d'application	165
 CHAPITRE 8 • ANALYSE SPECTRALE DES SIGNAUX DISCRETS	 175
8.1 Les différentes représentations fréquentielles	175
8.2 Transformée de Fourier discrète	176
8.2.1 Définition	176
8.2.2 Transformée de Fourier et TFD	178
8.3 Transformée de Fourier rapide	180
8.4 Convolution et corrélation numériques	188
8.4.1 Convolution discrète	188
8.4.2 Corrélation discrète	189
8.5 Effet du fenêtrage temporel	190
Exercice d'application	196

CHAPITRE 9 • NOTIONS DE FILTRAGE NUMÉRIQUE	125
9.1 Introduction	203
9.1.1 Définition du filtrage numérique	203
9.1.2 Transformée en z	206
9.1.3 Filtrage numérique simple : lissage temporel	207
9.2 Synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie	210
9.2.1 Équation aux différences	210
9.2.2 Synthèse des filtres numériques par transformation de $H(p)$ en $H(z)$	211
9.3 Synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle finie	216
9.4 Réalisation des filtres numériques	216
9.4.1 Filtres numériques synthétisés par $H(z)$	217
9.4.2 Filtres numériques basés sur la convolution	220
9.5 Filtres numériques avancés	221
9.5.1 Filtres numériques de la valeur médiane	221
9.5.2 Filtres numériques multiscadence	222
Exercices d'application	223
 PARTIE 3 • LES BASES DE L'ACQUISITION DE DONNÉES	 233
 CHAPITRE 10 • LES CHAÎNES D'ACQUISITION DE DONNÉES	 235
10.1 Généralités	235
10.1.1 Introduction	235
10.1.2 Les types de signaux d'entrées/sorties	237
10.1.3 Codage de l'information au niveau d'un calculateur	238
10.2 Capteurs et actionneurs	241
10.2.1 Introduction	241
10.2.2 Les caractéristiques des capteurs	241
10.2.3 Les principaux types de capteurs	243
10.2.4 Les principaux types d'actionneurs	253
10.3 Le câblage	254
10.3.1 La nature du câble	255
10.3.2 Les différentes configurations du câblage	260
10.4 Le conditionnement de signaux	263
10.5 Exemple d'une chaîne industrielle	265
 CHAPITRE 11 • LES ENTRÉES/SORTIES NUMÉRIQUES	 269
11.1 Structure d'une chaîne d'E/S numériques	269
11.1.1 Cas simples : signaux compatibles TTL	269
11.1.2 Cas général	270
11.2 Composants d'une chaîne d'E/S numériques	271
11.2.1 Adaptation	271
11.2.2 Isolement et filtrage	274
11.2.3 Étage tampon	277
11.3 Exemple d'une interface d'E/S numériques	277

CHAPITRE 12 • LES ENTRÉES/SORTIES ANALOGIQUES	281
12.1 Introduction	281
12.2 La conversion numérique/analogique	282
12.2.1 Introduction	282
12.2.2 Convertisseur à résistances pondérées	283
12.2.3 Convertisseur à réseau en échelle $R-2R$	285
12.2.4 Caractéristiques principales des CNA	286
12.2.5 Erreurs sur la courbe de transfert d'un CNA	287
12.2.6 Quelques applications des convertisseurs N/A	290
12.3 La conversion analogique/numérique	292
12.3.1 Introduction	292
12.3.2 CAN à intégration simple rampe	294
12.3.3 CAN à intégration double rampe	295
12.3.4 Convertisseur à comptage ou incrémental	297
12.3.5 Convertisseur à approximations successives	298
12.3.6 Convertisseur parallèle (<i>flash converter</i>)	299
12.3.7 Convertisseur SIGMA-DELTA	301
12.3.8 Convertisseur A/N logarithmique	302
12.3.9 Caractéristiques et erreurs des convertisseurs A/N	303
12.3.10 Applications des convertisseurs A/N	303
12.4 Caractéristiques techniques des convertisseurs	305
12.4.1 Caractéristiques techniques des CNA	305
12.4.2 Caractéristiques techniques des CAN	305
12.4.3 Réalisation technologique des convertisseurs	305
12.5 Échantillonneur/bloqueur	306
12.5.1 Définition d'un échantillonneur/bloqueur	306
12.5.2 Caractéristiques d'un échantillonneur/bloqueur	307
12.5.3 Structure interne d'un échantillonneur/bloqueur	309
CHAPITRE 13 • LA MISE EN ŒUVRE D'UNE CHAÎNE D'ACQUISITION DE DONNÉES	311
13.1 Introduction	311
13.2 Fonctions supplémentaires	312
13.2.1 Multiplexage	312
13.2.2 Amplification programmable	314
13.2.3 Temporisation ou comptage	315
13.2.4 Bus	316
13.3 Caractéristiques générales des cartes d'entrées/sorties	317
13.3.1 Architectures matérielles des cartes d'acquisition de données analogiques	317
13.3.2 Caractéristiques des cartes d'entrées/sorties	319
13.4 Méthodologie de mise en œuvre d'une chaîne d'acquisition de données	323
13.4.1 Introduction	323
13.4.2 Caractérisation des signaux d'entrées/sorties	324
13.4.3 Méthodologie d'analyse	328
13.4.4 Les modes d'acquisition de données	329
Exercice d'application	331

CHAPITRE 14 • EXEMPLE D'APPLICATIONS	335
14.1 Pilotage d'une machine à compression rapide pour des essais de combustion	335
14.1.1 Présentation générale de l'application	335
14.1.2 Description de la partie mécanique	336
14.1.3 Description de la partie mesure et contrôle	337
14.1.4 Conclusion	339
14.2 Étude d'écoulements turbulents réactifs par vélocimétrie laser	340
14.2.1 Présentation générale de l'application	340
14.2.2 Cahier des charges et méthodologie expérimentale	340
14.2.3 Conclusion	342
14.3 Étude de la réponse vibratoire des cloches	343
14.3.1 Présentation générale de l'application	343
14.3.2 Application d'analyse vibratoire des cloches	343
14.3.3 Conclusion	345
14.4 Étude des interfaces dans les multimatériaux	345
14.4.1 Présentation générale de l'application	345
14.4.2 Banc expérimental de l'application	346
14.4.3 Acquisition et traitement de données des expériences	347
14.4.4 Conclusion	348
 PARTIE 4 • ANNEXES	 351
ANNEXE A • DISTRIBUTION DE DIRAC	353
ANNEXE B • DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE FOURIER	356
ANNEXE C • TRANSFORMÉES DE FOURIER	359
ANNEXE D • TRANSFORMÉES DE LAPLACE	362
ANNEXE E • FONCTIONS DE TRANSFERT	364
ANNEXE F • TRANSFORMÉE EN z	365
ANNEXE G • PRINCIPAUX MONTAGES DE L'AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL	367
ANNEXE H • LE LOGICIEL D'INSTRUMENTATION LABVIEW™	371
ANNEXE I • RAPPELS MATHÉMATIQUES POUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL	380
LEXIQUE	383
NOTATIONS ET ABRÉVIATIONS	385
BIBLIOGRAPHIE	387
INDEX	388

Introduction

Avant de présenter le contenu des différents chapitres de cet ouvrage, il convient de donner quelques définitions précises et de situer la place de ce livre dans le vaste domaine que recouvrent le traitement des signaux et l'acquisition de données.

QUELQUES DÉFINITIONS

Un *signal* est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Il sert de vecteur à une information. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Les signaux, considérés dans ce livre, sont des grandeurs électriques variant en fonction du temps $s(t)$ obtenues à l'aide de capteurs. Mais le traitement du signal s'applique à tous les signaux physiques (onde acoustique, signal optique, signal magnétique, signal radioélectrique, etc.), comme cela est illustré sur la figure 1, page suivante. Le traitement d'images peut être considéré comme une extension du traitement du signal aux signaux bidimensionnels (images).

Le *bruit* est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.). La différenciation entre le signal et le bruit est artificielle et dépend de l'intérêt de l'utilisateur : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur des télécommunications par satellites et un signal pour les radioastronomes.

La *théorie du signal* a pour objectif fondamental la « description mathématique » des signaux. Cette représentation commode du signal permet de mettre en évidence ses principales caractéristiques (distribution fréquentielle, énergie, etc.) et d'analyser les modifications subies lors de la transmission ou du traitement de ces signaux.

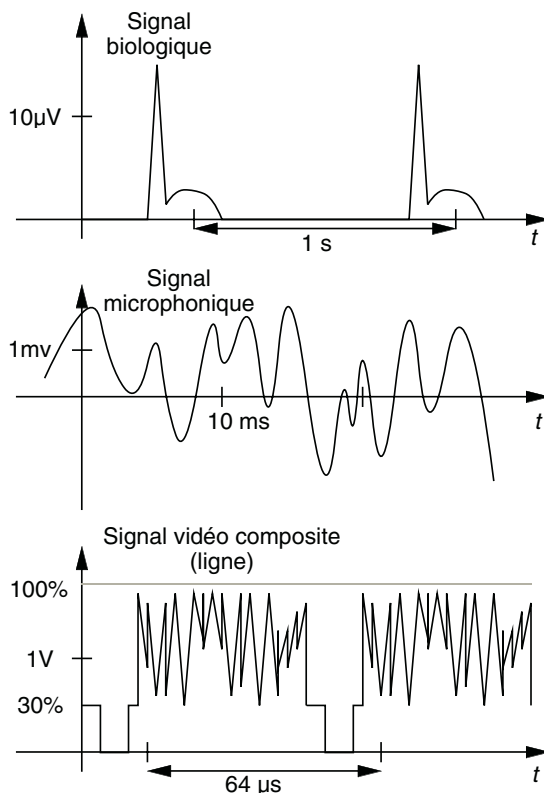


Figure 1. Exemples des différents types de signaux physiques obtenus à l'aide de divers capteurs.

Le *traitement du signal* est la discipline technique qui, s'appuyant sur les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux. Son champ d'application se situe donc dans tous les domaines concernés par la perception, la transmission ou l'exploitation des informations véhiculées par ces signaux.

Le *traitement de l'information* fournit un ensemble de concepts permettant d'évaluer les performances des systèmes de transfert d'informations, en particulier lorsque le signal porteur de message est bruité. Cela inclut les méthodes de « codage de l'information » dans le but de la réduction de redondance, de la correction des erreurs, de la confidentialité (cryptage). L'ensemble des concepts et méthodes développés dans le traitement de l'information et du signal forme la théorie de la communication.

LA CHAÎNE DE COMMUNICATION

Le schéma d'une chaîne de communication, représenté sur la figure 2, page ci-contre, met donc en relation un système physique en évolution qui délivre un message et un système physique qui doit recevoir et exploiter cette information.

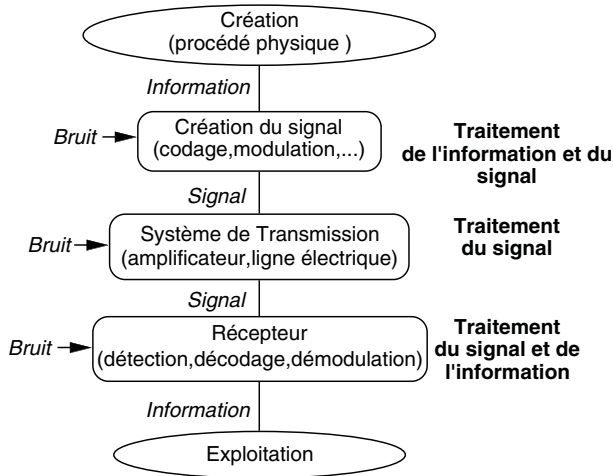


Figure 2. Schéma d'une chaîne de communication.

L'information fournie va être transformée en signal, qui sera acheminé ensuite par le canal de transmission. Celui-ci est ensuite détecté par le récepteur qui doit fournir l'information contenue dans le signal. Au niveau de l'élaboration du signal, du système de transmission et du récepteur, interviennent des éléments perturbateurs qui vont détériorer le signal en lui ajoutant du bruit. Le traitement de l'information et le traitement du signal auront donc pour tâche de réaliser la meilleure chaîne de communication possible : c'est-à-dire la transmission de l'information initiale la plus complète. Cette chaîne de communication se retrouve dans toutes les applications qui traitent du contrôle de procédés physiques par un ou plusieurs systèmes informatiques.

La figure 3, page suivante, illustre une chaîne de communication complète avec ou sans perturbation au niveau du canal de transmission : un robot à commande vocal.

Au niveau des différents systèmes (émission, transmission et réception), les fonctions, définies par le traitement de l'information et le traitement du signal, seront réalisées à partir des techniques électroniques, informatiques ou physiques. Seuls certains aspects du traitement du signal et de ces techniques sont abordés dans cet ouvrage.

PRINCIPALES FONCTIONS DU TRAITEMENT DU SIGNAL

Les fonctions du traitement du signal peuvent se diviser en deux catégories : l'élaboration des signaux (incorporation des informations) et l'interprétation des signaux (extraction des informations). Les principales fonctions intégrées dans ces deux parties sont les suivantes :

► Élaboration des signaux

- synthèse : création de signaux de forme appropriée en procédant par exemple à une combinaison de signaux élémentaires ;

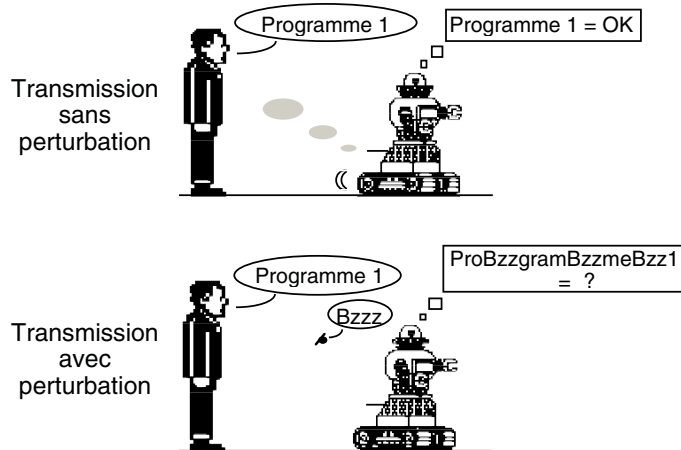


Figure 3. Exemple d'une chaîne de communication. L'information « Programme 1 », fournie par l'utilisateur, est à transmettre au robot. Ce message est transformé en signal sous la forme de vibrations acoustiques se propageant dans l'air qui sera, dans ce cas, le canal de transmission. Le signal arrive au destinataire (robot) avec ou sans modifications (bruit au niveau de la transmission). Le signal doit être détecté et analysé et ensuite l'information qu'il contient interprétée. Cet ensemble forme ce que l'on appelle la « chaîne de communication ».

- modulation, changement de fréquence : moyen permettant d'adapter un signal aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission ;
- codage : traduction en code binaire (quantification), etc.

► *Interprétation des signaux*

- filtrage : élimination de certaines composantes fréquentielles indésirables ;
- détection : extraction du signal d'un bruit de fond (corrélation) ;
- identification : classement d'un signal dans des catégories préalablement définies ;
- analyse : isolement des composantes essentielles ou utiles d'un signal de forme complexe (transformée de Fourier) ;
- mesure : estimation d'une grandeur caractéristique d'un signal avec un certain degré de confiance (valeur moyenne, etc.).

LES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

Les qualités actuelles du traitement numérique de l'information conduisent à son développement pour résoudre les problèmes de contrôle/commande de procédés industriels. Le système de traitement numérique, schématisé sur la figure 4, page ci-contre, va réaliser la saisie de l'information, traiter ces informations suivant un programme de contrôle (régulation, filtrage numérique, etc.) et d'après des valeurs de consignes entrées par l'utilisateur, envoyer des signaux de commande au processus industriel pour atteindre le comportement cherché. Le numérique présente, en effet,

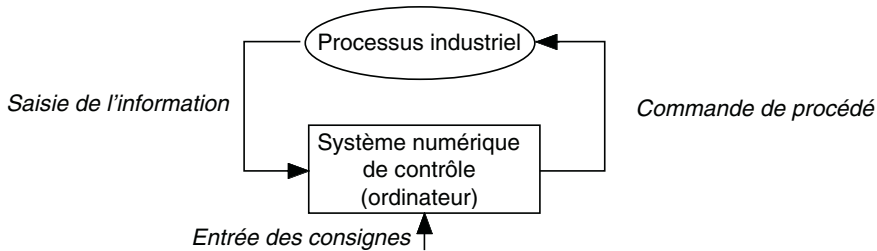


Figure 4. Contrôle/commande d'un processus industriel par un système de traitement numérique.

un grand nombre d'avantages par rapport à un contrôle de processus par un système analogique :

- reproductibilité des systèmes (circuits logiques) ;
- stabilité : pas de dérive en temps ou en température ;
- adaptabilité et souplesse d'emploi (modification du programme) ;
- fiabilité : circuits à très grande intégration ;
- rapidité : jusqu'à 10 MHz environ en temps réel.

Les grandeurs physiques (mouvement mécanique, variation de température, etc.) liées aux procédés physiques contrôlés mis en jeu doivent être transformées en signaux analogiques électriques (courant ou tension) : cela est le rôle des *capteurs* ou transducteurs (quartz, thermocouple...) dans le cas de la mesure. Inversement, la commande au niveau du processus est faite à l'aide d'*actionneurs* ou récepteurs (moteur, vanne...) qui transforment le signal analogique électrique reçu en grandeurs physiques (énergie mécanique, chaleur, etc.).

Dans le cas des traitements par des systèmes numériques, ces signaux analogiques transmis ou reçus seront transformés en signaux numériques. Ce rôle est rempli par des interfaces électroniques spécialisées qui sont composées de différents éléments : les convertisseurs analogiques-numériques et numériques-analogiques, les échantillonneurs-bloqueurs, les multiplexeurs, les amplificateurs à gain programmable, etc. Ainsi le schéma complet de la chaîne de pilotage d'un processus physique

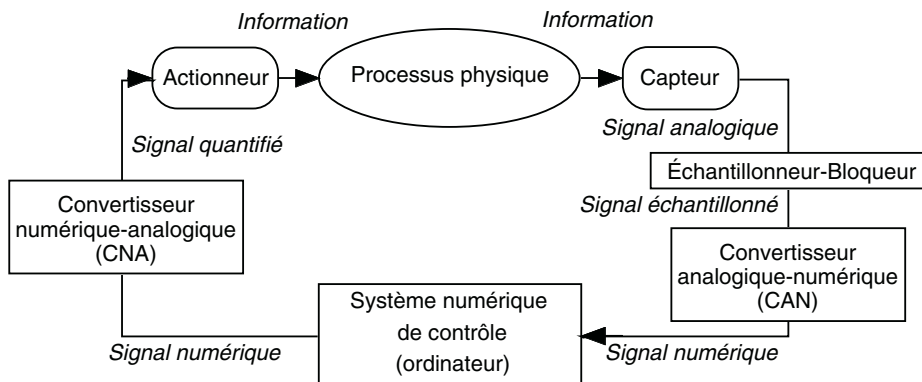


Figure 5. Pilotage d'un processus industriel par un système de traitement numérique.

par un système numérique peut être représenté par le schéma de la figure 5, page précédente. Les fonctions du traitement numérique sont très nombreuses : filtrage, analyse spectrale, modulation, détection, estimation, transcodage, génération de signaux, reconnaissance, correction...

ORGANISATION GÉNÉRALE DU LIVRE

Le contenu et l'organisation de ce livre ont été développés à partir de l'idée directrice suivante : « lors de la mise en œuvre d'une application de mesures ou de contrôle d'un procédé physique par un système informatique, le concepteur se trouve confronté à des problèmes liés aux nombreux domaines de ce qu'il est convenu d'appeler l'Informatique Industrielle. En premier lieu, nous trouvons la conception de l'application, c'est-à-dire le traitement du signal et l'automatisation ; puis la deuxième étape la réalisation matérielle (micro-ordinateur avec cartes d'interfaces) et logicielle. Si les domaines de l'automatique et de la programmation sont bien cernés pour ce type d'application, il est souvent difficile de trouver les éléments permettant la mise en œuvre du traitement des signaux et de l'acquisition de données ».

La figure 6 permet de situer les points traités dans ce livre par rapport à l'ensemble du domaine. Il est évident que cet ouvrage n'est pas un traité complet de traitement du signal, sujet très vaste et en constante évolution. Par contre il offre un outil de base à tous les techniciens et ingénieurs qui travaillent dans le domaine du test et mesures ou du contrôle de procédés.

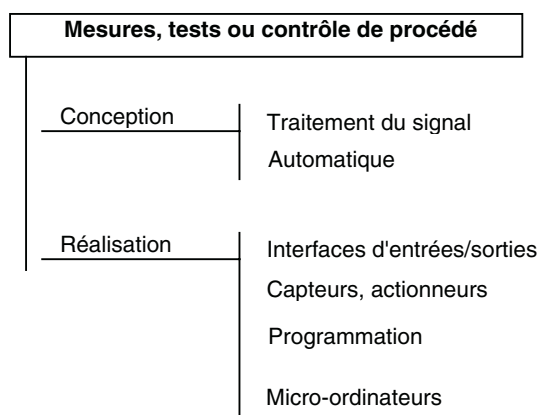


Figure 6. Visualisation de l'intégration des sujets traités dans cet ouvrage pour la réalisation d'applications de mesures ou de conduite de procédés. Les mots grisés correspondent aux sujets non traités dans cet ouvrage.

Ce livre est composé de trois grandes parties : le traitement des signaux analogiques (partie A), le traitement des signaux numériques (partie B) et l'acquisition de données (partie C). Les six premiers chapitres sont consacrés aux bases du traitement des signaux analogiques. Les suivants traitent des signaux numériques. Enfin les quatre

derniers chapitres sont entièrement dédiés aux composants des interfaces industrielles et aux chaînes d'acquisition et de restitution de données.

Le chapitre 1 présente les notions de théorie des signaux nécessaires à la compréhension de l'ouvrage. Il permet de plus de fixer les notations utilisées par la suite.

Le chapitre 2 est consacré à la transformation de Fourier des signaux analogiques périodiques et non périodiques qui constitue la base du traitement des signaux. Cette analyse spectrale des signaux analogiques permet de bien décrire la représentation duale de tous signaux : temps et fréquence.

Le chapitre 3 présente la théorie générale des systèmes de transmission avec une introduction à la notion de corrélation.

Le chapitre 4 traite du filtrage analogique en utilisant la formulation théorique développée dans le chapitre précédent. Cette présentation permet ainsi une extension à tous les types de filtres et de sollicitations de ces filtres.

Le chapitre 5 étudie un des aspects importants du traitement des signaux analogiques : la modulation. Les méthodes les plus utilisées et les divers moyens de mise en œuvre y sont présentés.

Le chapitre 6 est consacré aux signaux aléatoires. En particulier il s'intéresse à la notion de bruit, ainsi qu'aux techniques de détection et d'extraction d'un signal noyé dans le bruit.

La transformation des signaux analogiques en signaux numériques est étudiée en détail au chapitre 7. Ce chapitre, qui présente en particulier le théorème d'échantillonnage, est sans doute le plus important de cet ouvrage.

Le chapitre 8 est consacré à l'analyse spectrale des signaux numériques.

Le chapitre 9 présente les concepts de base du domaine très riche que constitue le filtrage numérique avec des applications simples de diverses méthodes.

Finalement, le chapitre 10 introduit les chaînes industrielles de traitement des signaux avec en particulier une description succincte des capteurs et actionneurs, les chapitres 11 et 12 traitent des composants d'entrées/sorties numériques et analogiques. La lecture du chapitre 13 doit permettre une mise en œuvre plus complète et plus rationnelle des multiples composants et des cartes d'interfaces actuellement disponibles.

Neuf annexes complètent cet ouvrage. Les six premières sont des formulaires ou résumés sur les différentes transformées ou fonctions utilisées. L'annexe G développe les principaux montages de l'amplificateur opérationnel employés dans les différents points traités. L'annexe H présente succinctement le logiciel d'instrumentation LabVIEW™ utilisé pour illustrer les traitements des signaux présentés dans les différents chapitres. Enfin la dernière annexe donne quelques rappels mathématiques utiles en traitement du signal.

Ce livre s'adresse à tous les techniciens ou ingénieurs qui désirent développer une application de mesures ou de contrôle/commande de procédé avec un traitement des signaux. Cet ouvrage est aussi destiné aux étudiants désirant acquérir une formation de base dans les techniques du traitement du signal et de leur mise en œuvre. Les nombreux exemples traités permettent de comprendre aisément les différentes notions introduites.

Ce livre n'a pas pour but d'être un ouvrage exhaustif. En effet il existe de nombreux ouvrages qui décrivent de façon complète toutes les méthodes et techniques utilisées dans ces domaines de l'informatique industrielle et particulièrement dans le domaine du traitement du signal (bibliographie). L'aspect théorique du signal a volontairement été limité au strict nécessaire pour la compréhension des modèles utilisés. Mais cet ouvrage permettra à son lecteur de s'initier rapidement aux bases du traitement des signaux et de l'acquisition de données.

PARTIE 1

LE TRAITEMENT DES SIGNAUX ANALOGIQUES

Chapitre 1

Représentation des signaux

1.1 MODÉLISATION DES SIGNAUX

Un signal expérimental est une grandeur physique et doit donc être physiquement réalisable. Les mesures macroscopiques analogiques, réalisées à partir d'appareils de mesures comme un oscilloscope, fournissent des courbes « tension en fonction du temps » du type de celle représentée sur la figure 1.1. Ces signaux physiques sont représentés par des fonctions $s(t)$ à valeurs réelles d'une variable réelle t . Par conséquent, le signal possède les caractéristiques suivantes :

- énergie bornée ;
- amplitude bornée ;

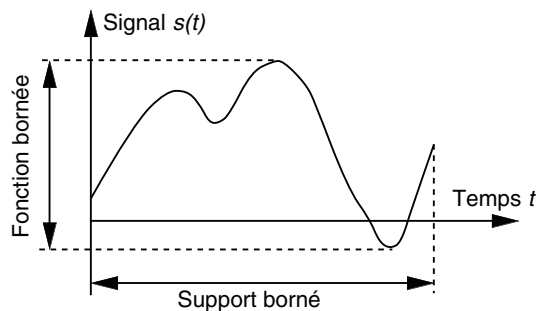


Figure 1.1. Enregistrement d'un signal physique.

- continu temporellement ;
- causal ($s(t) = 0$ pour $t < 0$) ;
- spectre du signal borné (tend vers 0 lorsque la fréquence tend vers l'infini).

Mais sur le plan théorique, pour la commodité du calcul et l'étude de certains phénomènes, les signaux sont représentés par des fonctions :

- à énergie théorique infinie ;
- avec des discontinuités (signal carré) ;
- définies sur l'ensemble des réels (signaux non causaux) ;
- à spectre du signal infini ;
- à valeurs complexes :

$$s(t) = A e^{j\omega t} = A(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

Remarque : il est important de noter que l'introduction de tels modèles mathématiques de signaux réels conduit nécessairement à une simplification et nécessite donc une interprétation des résultats pour retrouver la réalité.

1.2 CLASSIFICATION DES SIGNAUX

Pour faciliter l'étude des signaux, différents modes de classification ou de modélisation peuvent être envisagés :

- représentation temporelle des signaux ;
- caractéristique énergétique ;
- représentation spectrale ;
- caractéristique morphologique (continu ou discret).

1.2.1 Représentation temporelle des signaux

La première classification, basée sur l'évolution du signal en fonction du temps, fait apparaître deux types fondamentaux (figure 1.2, page ci-contre) :

- les *signaux certains* (ou déterministes) dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite par un modèle mathématique. Ces signaux proviennent de phénomènes pour lesquels on connaît les lois physiques correspondantes et les conditions initiales, permettant ainsi de prévoir le résultat ;
- les *signaux aléatoires* (ou probabilistes) dont le comportement temporel est imprévisible et pour la description desquels il faut se contenter d'observations statistiques.

Parmi les signaux déterministes, on distingue les signaux périodiques satisfaisant à la relation suivante :

$$s(t) = s(t + T) \quad \text{avec } T \text{ la période} \quad (1.1)$$

Les signaux sinusoïdaux sont un cas particulier de ces signaux :

$$s(t) = A \sin[(2\pi/T)t + \varphi] \quad (1.2)$$

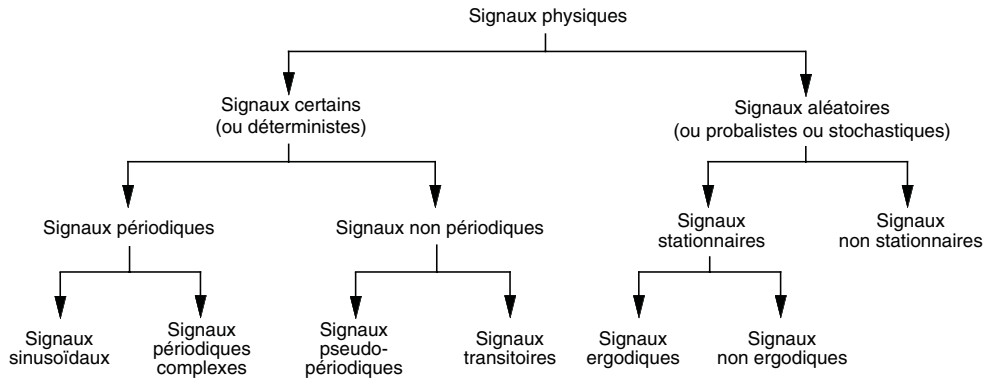


Figure 1.2. Classification des signaux observés dans le domaine temporel.

Les signaux non périodiques se composent d'une part des signaux pseudo-périodiques formés d'une somme de sinusoïdes de périodes différentes et d'autre part des signaux transitoires dont l'existence est limitée dans le temps. Ces signaux « certains » peuvent en principe être reproduits rigoureusement identiques à eux-mêmes.

En ce qui concerne les signaux aléatoires, ils sont dits *stationnaires* lorsque leur valeur moyenne est indépendante du temps, c'est-à-dire que les résultats de leur analyse statistique restent les mêmes quel que soit le moment où l'on commence l'observation d'une partie déterminée du signal.

De plus ces signaux aléatoires stationnaires sont *ergodiques* s'il est identique de faire une moyenne statistique à un instant donné sur différents essais ou de faire une moyenne temporelle suffisamment longue sur un seul de ces essais.

Dans cet ouvrage nous nous intéressons exclusivement au type des signaux certains, excepté dans le chapitre 6 où nous abordons les méthodes de traitements spécifiques des signaux aléatoires et en particulier du signal dit de bruit, qui fait partie de cette deuxième catégorie.

1.2.2 Classification énergétique

La puissance électrique instantanée fournie à une résistance R (ou conductance G) est définie comme le produit des valeurs instantanées de la tension $u(t)$ à ses bornes et du courant $i(t)$ qui la traverse :

$$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = Gu^2(t) \quad (1.3)$$

L'énergie dissipée sur un intervalle $[t_1, t_2]$, avec $t_1 < t_2$, est l'intégrale de cette puissance instantanée et se mesure en joules (J) :

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt = G \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt \quad (1.4)$$

Par conséquent la puissance moyenne $P(t_1, t_2)$, mesurée en watts (W), s'exprime sous la forme suivante :

$$P(t_1, t_2) = \frac{W(t_1, t_2)}{(t_2 - t_1)} \quad (1.5)$$

Par extension on appelle énergie W_s et puissance moyenne P_s d'un signal $s(t)$, calculées sur un intervalle $[t_1, t_2]$, les valeurs quadratique et quadratique moyenne suivantes :

$$W_s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt \quad (1.6)$$

et

$$P_s(t_1, t_2) = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt \quad (1.7)$$

Il est à remarquer que la valeur efficace du signal $s(t)$, calculée sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, se définit à partir de l'expression 1.7 :

$$s_{\text{eff}}(t_1, t_2) = \sqrt{P_s(t_1, t_2)} \quad (1.8)$$

En considérant un intervalle s'étendant à tout l'axe réel, les relations 1.6 et 1.7 donnent l'énergie totale et la puissance moyenne totale :

$$W_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt \quad (1.9)$$

et

$$P_s = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s^2(t) dt \quad (1.10)$$

Pour un signal périodique (période T_0), la puissance moyenne totale est calculée sur une période :

$$P_s = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s^2(t) dt$$

Si le signal est représenté par une fonction complexe de la variable réelle t , les définitions sont équivalentes en remplaçant $s^2(t)$ par $|s(t)|^2$ ou $s(t) \cdot \bar{s}(t)$, où $\bar{s}(t)$ est la quantité complexe conjuguée de $s(t)$.

La plupart des signaux peuvent être classés à partir de ces deux grandeurs, énergie totale et puissance moyenne totale, suivant les deux ensembles :

– signaux à énergie finie qui satisfont à la condition suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt < \infty \quad (1.11)$$

- signaux à puissance moyenne finie qui satisfont à :

$$0 < \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s^2(t) dt < \infty \quad (1.12)$$

Les premiers signaux correspondent à tous les signaux de type transitoire et les seconds comprennent par exemple tous les signaux périodiques ou quasi périodiques. Deux remarques peuvent être faites à partir des deux expressions 1.11 et 1.12 :

- un signal à puissance moyenne finie non nulle a une énergie totale infinie ;
- un signal à énergie totale finie a une puissance moyenne nulle (cas des signaux physiques).

1.2.3 Classification spectrale

Un signal peut être classé suivant la distribution de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence (spectre du signal). Le domaine des fréquences occupé par son spectre ΔF est aussi appelé la largeur de bande du signal (figure 1.3) :

$$\Delta F = F_{\max} - F_{\min}$$

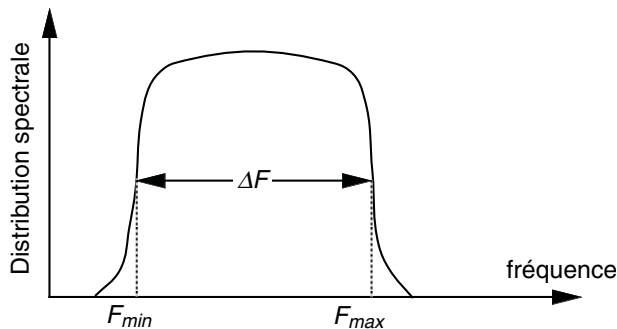


Figure 1.3. Distribution spectrale d'un signal avec la largeur de bande ΔF .

Cette caractéristique, exprimée en hertz (Hz), est absolue. Aussi il est nécessaire de la comparer au domaine de fréquences dans lequel se situe le signal. En considérant la fréquence moyenne $F_{\text{moy}} = (F_{\max} - F_{\min})/2$, on peut distinguer deux types de signaux :

- les signaux à bande étroite avec $\Delta F/F_{\text{moy}}$ petit (soit $F_{\max} \approx F_{\min}$) ;
- les signaux à large bande avec $\Delta F/F_{\text{moy}}$ grand (soit $F_{\max} \gg F_{\min}$).

Pour les signaux à bande étroite, il est possible de les classer par le domaine de variation de la fréquence moyenne F_{moy} :

- $F_{\text{moy}} < 250 \text{ kHz}$ signaux basses fréquences (BF)
- $250 \text{ kHz} < F_{\text{moy}} < 30 \text{ MHz}$ signaux hautes fréquences (HF)

- $30 \text{ MHz} < F_{\text{moy}} < 300 \text{ MHz}$ signaux très hautes fréquences (VHF)
- $300 \text{ MHz} < F_{\text{moy}} < 3 \text{ GHz}$ signaux ultra hautes fréquences (UHF)
- $F_{\text{moy}} > 3 \text{ GHz}$ signaux super hautes fréquences (SHF)

Lorsque la fréquence du signal devient très grande, pratiquement supérieure à quelques térahertz ($\text{THz} = 10^{12} \text{ Hz}$), la longueur d'onde est le paramètre de référence λ ($= c/F$ avec c vitesse de la lumière $300\,000 \text{ km/s}$) :

- $700 \text{ nm} < \lambda < 0,1 \text{ mm}$ signal lumineux infrarouge
- $400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}$ signal lumineux visible
- $10 \text{ nm} < \lambda < 400 \text{ nm}$ signal lumineux ultraviolet

1.2.4 Les signaux numériques

Le temps est un paramètre important de classification. Comme nous venons de le voir, le traitement numérique des signaux conduit à faire la distinction entre les signaux dits à temps continus (signaux continus) et les signaux dits à temps discrets (signaux discrets ou échantillonnés). Un autre paramètre des signaux traités est à prendre en compte, c'est l'amplitude qui peut aussi être continue ou discrète (quantifiée).

Ainsi quatre formes de signaux, qui se retrouvent dans un système numérique de contrôle d'un processus physique, peuvent être distinguées (figure 1.4, page ci-contre) :

- signal à amplitude et temps continus (signal analogique) : $s(t)$;
- signal à amplitude discrète et temps continu (signal quantifié) : $s_q(t)$. Ce signal correspond à celui qui est fourni à la sortie d'un circuit convertisseur numérique-analogique pour la commande d'un actionneur (chapitre 12) ;
- signal à amplitude continue et temps discret (signal échantillonné) : $s(nT_e)$. Ce signal est obtenu à l'aide d'un circuit échantillonneur-bloqueur et est utilisé par un circuit convertisseur analogique numérique pour obtenir un signal logique utilisable par un ordinateur (chapitre 12) ;
- signal à amplitude discrète et temps discret (signal logique) : $s_q(nT_e)$. Ce dernier cas correspond en réalité à une suite de nombres codés en binaire. Ces nombres, utilisés au sein d'un ordinateur, se transmettent sous la forme de plusieurs signaux de type numérique 0 V (0 logique) ou 5 V (1 logique) se propageant en parallèle : 8 signaux pour un nombre codé sur 8 bits.

Définition. On appelle *numérisation* d'un signal l'opération qui consiste à faire passer un signal de la représentation dans le domaine des temps et des amplitudes continus au domaine des temps et des amplitudes discrets. Cette opération de numérisation d'un signal peut être décomposée en deux étapes principales :

- échantillonnage ;
- quantification.

La restitution (ou l'interpolation) constitue une autre phase qui intervient lors du passage du signal numérique au signal analogique : commande d'un actionneur.

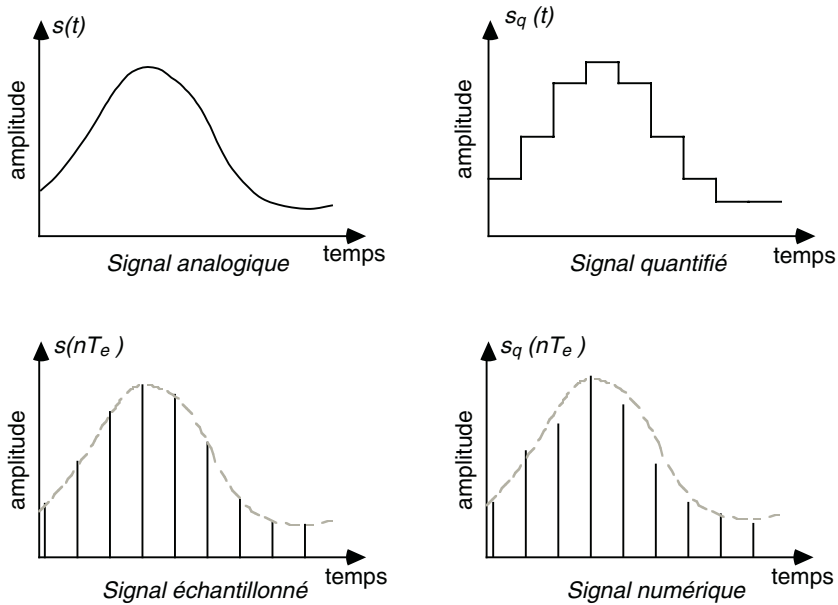


Figure 1.4. Classification morphologique des signaux.

Ces trois étapes sont indissociables. En effet, le signal, étant le support physique d'une information, doit conserver au cours de ces modifications tout le contenu informatif initial. Cette condition, ajoutée à la notion de coût limite d'un système, va être à la base de la numérisation des signaux et de l'étude du traitement numérique.

Chapitre 2

Transformation de Fourier

2.1 TRANSFORMATION DE FOURIER DES FONCTIONS PÉRIODIQUES. SÉRIE DE FOURIER

2.1.1 Définition. Théorème de Fourier

Si $s(t)$ est une fonction de t périodique, de période T_0 ($= 1/F_0$), elle peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences f multiple de la fréquence F_0 , dite fondamentale. Soit :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n F_0 t) + b_n \sin(2\pi n F_0 t)] \quad (2.1)$$

où a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier. Ils se calculent à partir des relations suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) dt = \overline{s(t)} \quad (2.2)$$

avec a_0 appelé valeur moyenne ou composante continue,

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \cos(2\pi n F_0 t) \cdot dt \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (2.3)$$

$$\text{et } b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \sin(2\pi n F_0 t) \cdot dt \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (2.4)$$

L'expression 2.1 peut s'écrire aussi sous la forme suivante d'un développement en harmoniques :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n F_0 t + \varphi_n) \quad (2.5)$$

avec

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad \varphi_n = \text{Arctan}(-b_n/a_n) \quad (2.6)$$

À partir de l'expression 2.5, nous pouvons construire la représentation graphique spectrale du signal dans un plan amplitude-fréquence comme étant la succession des pics ou raies d'amplitude c_n et positionnés aux fréquences nF_0 (figure 2.1).

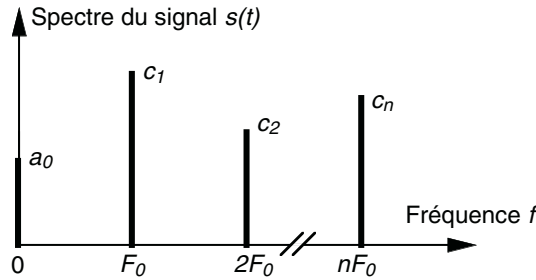


Figure 2.1. Spectre en fréquence d'un signal périodique.

Définition. Le *spectre en fréquence d'un signal* est constitué de la composante continue à la fréquence nulle d'amplitude a_0 , du fondamental à la fréquence F_0 d'amplitude c_1 et des différents harmoniques situés aux fréquences $f = nF_0$ d'amplitudes respectives c_n . Il est important de remarquer que le spectre d'une fonction périodique, de période T_0 ($= 1/F_0$), est discontinu et composé de raies dont l'écart minimum est, sur l'axe des fréquences, F_0 .

2.1.2 Distribution ou pic de Dirac

La distribution de Dirac (pic de Dirac ou encore impulsion de Dirac) peut être vue comme un outil symbolique permettant de formuler des expressions. Notée δ elle

peut être perçue comme la limite d'une impulsion d'amplitude A et de durée $1/A$ lorsque A tend vers l'infini. L'aire de cette impulsion est constante et égale à 1 quel que soit A . Le pic de Dirac sera défini comme ayant un poids ou une « masse » de 1 en $x = 0$ (figure 2.2). Dans le domaine du traitement du signal, le pic de Dirac $\delta(x)$ est une distribution ou « fonction » qui vérifie :

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot dx = 1$$

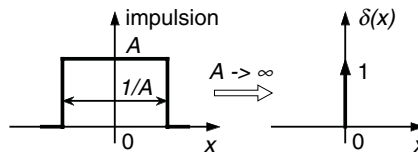


Figure 2.2. Représentation de la distribution ou pic de Dirac.

La distribution de Dirac possède des propriétés au niveau des opérations avec les fonctions : propriété de localisation (opération de « produit » avec une fonction) et propriété d'élément neutre (opération de « convolution » avec une fonction). Ces propriétés opératoires sont présentées au fur et à mesure des besoins et de façon complète dans l'annexe A. Il est important de souligner que, pour des raisons de facilité, les opérations, faisant intervenir pics de Dirac et fonctions, utilisent des notations identiques à celles utilisées pour les fonctions bien que nous soyons dans le domaine des distributions.

2.1.3 Représentations unilatérale et bilatérale

L'expression 2.1 peut encore se mettre sous la forme complexe suivante :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} S(nF_0) \cdot e^{j2\pi nF_0 t} \quad (2.7)$$

avec

$$S(nF_0) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{-j2\pi nF_0 t} \cdot dt \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (2.8)$$

et

$$S(0) = a_0 = \overline{s(t)}$$

Les valeurs négatives de n sont introduites dans un but de simplification ; mais, étant donné que $s(t)$ est réel, nous avons :

$$a_{-n} = a_n \quad \text{et} \quad b_{-n} = -b_n$$

$S(nF_0)$ représente les composantes du spectre en fréquence de $s(t)$, grandeur en général complexe, qui a pour module :

$$|S(nF_0)| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{c_n}{2} \quad (2.9)$$

et pour phase :

$$\varphi(nF_0) = \text{Arctan}(-b_n/a_n) \quad (2.10)$$

En utilisant la notation mathématique du pic de Dirac δ décrite précédemment, le spectre en fréquence du signal est formé de pics de Dirac de poids $|S(nF_0)|$ réparties sur tout l'axe des fréquences positives et négatives. Par convention, on dessine chaque raie en lui donnant une hauteur proportionnelle à son poids ou sa masse égale à $|S(nF_0)|$ (figure 2.3). L'expression du spectre $S(f)$ du signal est donc :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} S(nF_0) \cdot \delta(f - nF_0) \quad (2.11)$$

avec

$$S(nF_0) = |S(nF_0)| \cdot e^{j\varphi(nF_0)}$$

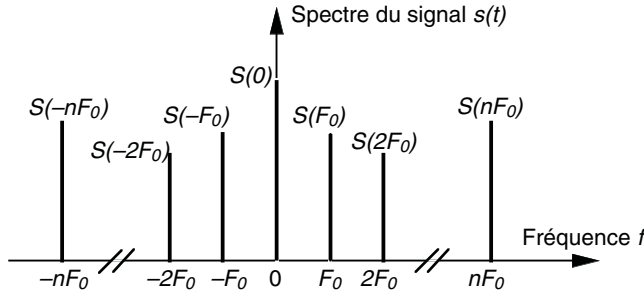


Figure 2.3. Spectre en fréquence d'un signal périodique avec un axe des fréquences de $-\infty$ à $+\infty$: représentation bilatérale.

Remarque : Ce spectre $S(f)$ est en général complexe formé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire et devrait donc être représenté dans un système à trois dimensions : axe des fréquences f , axe de la partie imaginaire $\text{Im}\{S(f)\}$ et axe de la partie réelle $\text{Re}\{S(f)\}$.

Cette représentation complexe du signal distribue donc, dans le domaine fréquentiel, les contributions du signal symétriquement de part et d'autre de l'origine sur l'axe des fréquences : c'est la *représentation spectrale bilatérale* $S(f)$ (fréquences positives et négatives). Cette représentation abstraite (fréquences négatives) présente l'avantage de simplifier les calculs au niveau du traitement des signaux. Seule la représentation unilatérale $S_{\text{réel}}(f)$ (spectres composés de fréquences positives uniquement), calculée par un développement en série de Fourier, est une représentation réelle qui peut être obtenue à partir d'analyseurs de spectres ou de transformateurs de Fourier qui présentent le module de ce spectre.

À partir des expressions 2.5 et 2.7, on peut déterminer la relation entre ces deux formes de représentation :

$$S_{\text{réel}}(f) = S(f) \cdot K_{\text{réel}}(f) \quad (2.12)$$

où $K_{\text{réel}}(f)$ (coefficient de représentation réelle) est définie par :

$$K_{\text{réel}}(f) \begin{cases} = 2 & \text{si } f > 0 \\ = 1 & \text{si } f = 0 \\ = 0 & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

Le concept de fréquence négative n'a pas de signification physique. Il peut être vu comme la traduction du sens de rotation de la vitesse angulaire ou pulsation ($\omega = 2\pi f$). Ainsi la fonction réelle $\cos(\omega t)$ ou $\cos(2\pi ft)$ peut être exprimée comme la somme de deux fonctions complexes dans le plan complexe (figure 2.4) :

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (2.13)$$

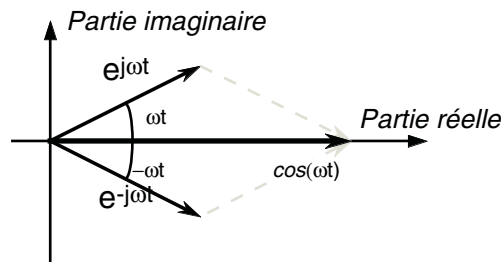


Figure 2.4. Introduction des fréquences négatives dans l'expression des signaux.

2.1.4 Exemples de signaux élémentaires

a) Signal sinusoïdal

Dans le cas des signaux sinusoïdaux ou cosinusoidaux, la transformée en série de Fourier du signal est identique à sa représentation mathématique.

► cas du signal $s(t) = \cos(2\pi F_0 t)$

La décomposition en série de Fourier est donc définie par :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad a_n = 0 \quad \text{pour } n > 1 \\ b_n &= 0 \quad \text{pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

D'après la relation 2.8, les valeurs de $S(nF_0)$ non nulles sont :

$$\begin{aligned} S(F_0) &= \frac{1}{2}(a_1 - jb_1) = \frac{1}{2} \\ S(-F_0) &= \frac{1}{2}(a_{-1} - jb_{-1}) = \frac{1}{2}(a_1 + jb_1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où le spectre du signal, écrit dans une représentation bilatérale suivant la relation 2.11, est :

$$S(f) = \frac{1}{2} [\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)] \quad (2.14)$$

La figure 2.5a représente ce signal et son spectre. Nous pouvons remarquer que, pour ce signal réel pair, le spectre est réel pair.

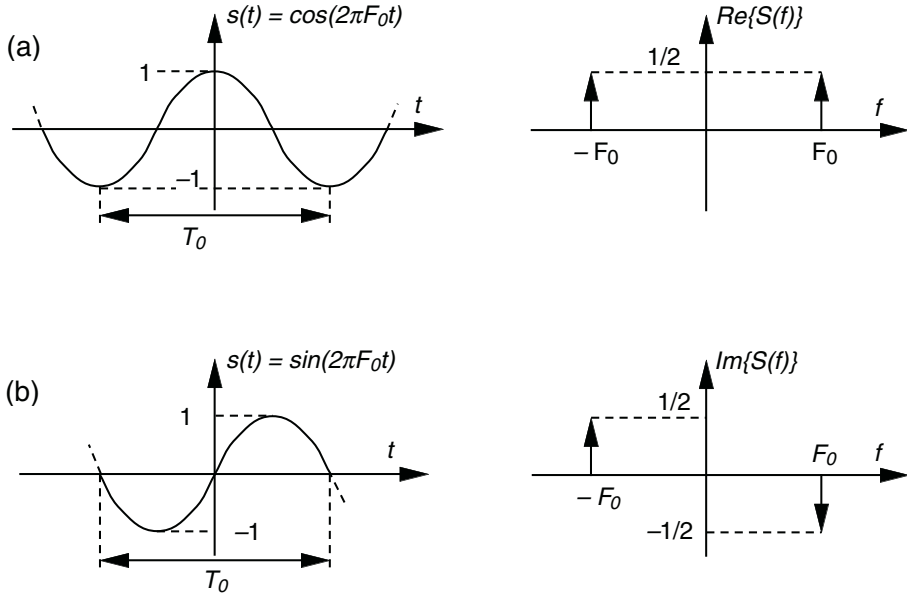


Figure 2.5. Spectres des signaux cosinusoidal (a) et sinusoïdal (b) dans une représentation bilatérale.

► cas du signal $s(t) = \sin(2\pi F_0 t)$

La décomposition en série de Fourier est donc définie par :

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \text{ pour } n \geq 0 \\ b_1 &= 1 \text{ et } b_n = 0 \text{ pour } n > 1 \end{aligned}$$

D'après la relation 2.8, les valeurs de $S(nF_0)$ non nulles sont :

$$\begin{aligned} S(F_0) &= \frac{1}{2}(a_1 - jb_1) = \frac{-j}{2} \\ S(-F_0) &= \frac{1}{2}(a_{-1} - jb_{-1}) = \frac{1}{2}(a_1 + jb_1) = \frac{j}{2} \end{aligned}$$

D'où le spectre du signal, écrit dans une représentation bilatérale suivant la relation 2.11, est :

$$S(f) = \frac{j}{2} [\delta(f + F_0) - \delta(f - F_0)] \quad (2.15)$$

La figure 2.5b, page ci-contre, représente ce signal et son spectre. Nous pouvons remarquer que, pour ce signal réel impair, le spectre est imaginaire impair.

b) cas d'un signal carré périodique

Si nous considérons un signal rectangulaire à alternances égales, de valeur moyenne nulle et d'amplitude 2, sa transformée en série de Fourier s'écrit sous la forme suivante :

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(2\pi F_0 t) + \frac{\sin(3 \cdot (2\pi F_0 t))}{3} + \frac{\sin(5 \cdot (2\pi F_0 t))}{5} + \dots \right] \quad (2.16)$$

ou

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi(2n+1)F_0 t)}{2n+1} \quad (2.17)$$

Le spectre bilatéral du signal, composé uniquement des harmoniques impairs, a pour expression (figure 2.6) :

$$S(f) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{(2n+1)} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0) \quad (2.18)$$

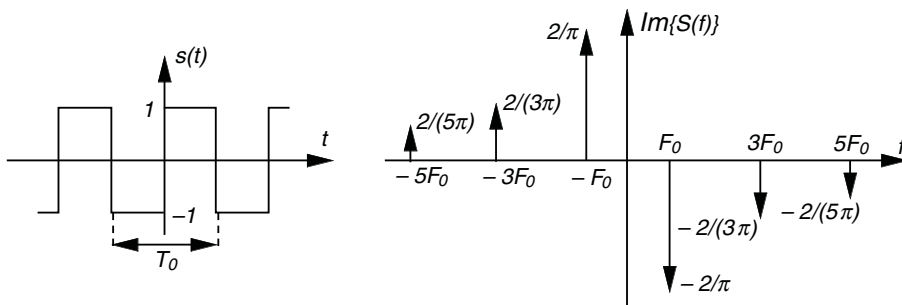


Figure 2.6. Spectre d'un signal carré périodique dans une représentation bilatérale.

Nous pouvons remarquer que, pour ce signal réel impair, le spectre est imaginaire impair.

Quelques développements en série de Fourier de signaux particuliers sont donnés en annexe B.

2.1.5 Propriétés du développement en série de Fourier

Nous avons une correspondance unique entre la fonction $x(t)$, son développement en série de Fourier et par conséquent sa représentation spectrale $X(f)$. Nous écrirons donc cette réciprocity sous la forme :

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$$

a) propriété de linéarité

Étant donné $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$ et $y(t) \xleftrightarrow{F} Y(f)$, nous avons :

$$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \xleftrightarrow{F} a \cdot X(f) + b \cdot Y(f)$$

avec a et b des constantes.

b) propriété de parité

Nous avons les principales propriétés de parité suivante :

- si la fonction $x(t)$ est réelle et paire, les coefficients b_n du développement en série de Fourier sont tous nuls et la représentation spectrale $X(f)$ est réelle et paire ;
- si la fonction $x(t)$ est réelle et impaire, les coefficients a_n du développement en série de Fourier sont tous nuls et la représentation spectrale $X(f)$ est imaginaire et impaire ;
- si la fonction $x(t)$ est réelle quelconque, la représentation spectrale $X(f)$ est complexe avec une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire.

D'autres propriétés utilisables sont étudiées dans le cadre de la transformée de Fourier pour les signaux non périodiques (paragraphe 2.2.3).

2.2 TRANSFORMÉE DE FOURIER DES FONCTIONS NON PÉRIODIQUES

2.2.1 Définition

On peut considérer la transformée de Fourier des fonctions non-périodiques comme une extension de la transformation précédente pour laquelle la période est infinie ($T_0 \rightarrow \infty$). L'intervalle de fréquence F_0 tend alors vers zéro et le spectre devient alors une fonction continue. En considérant les expressions 2.7 et 2.8, on a :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[e^{j2\pi n F_0 t} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(\tau) \cdot e^{-j2\pi n F_0 \tau} \cdot d\tau \right]$$

Après le passage à la limite $T_0 \rightarrow \infty$, il vient :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \cdot d\tau \right] \cdot df \quad (2.19)$$

D'où, la transformée de Fourier de $s(t)$, notée $S(f)$ ou $F\{s(t)\}$, et la transformée de Fourier inverse, notée $F^{-1}\{S(f)\}$:

$$F\{s(t)\} = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt \quad (2.20)$$

et

$$F^{-1}\{S(f)\} = s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df \quad (2.21)$$

Comme pour le cas des fonctions périodiques, $S(f)$ est une fonction de f , en général complexe, qui comprend donc une partie réelle $\text{Re}\{S(f)\}$ et une partie imaginaire $\text{Im}\{S(f)\}$:

$$\text{Re}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \cos(2\pi ft) \cdot dt \quad (2.22)$$

et

$$\text{Im}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \sin(2\pi ft) \cdot dt \quad (2.23)$$

L'amplitude $|S(f)|$ du spectre est donnée par la relation suivante :

$$|S(f)| = \sqrt{[\text{Re}\{S(f)\}]^2 + [\text{Im}\{S(f)\}]^2} \quad (2.24)$$

et la phase est :

$$\varphi(f) = \text{Arctan}(-\text{Im}\{S(f)\} / \text{Re}\{S(f)\}) \quad (2.25)$$

2.2.2 Conditions d'existence de la transformée de Fourier

Pour qu'une fonction $x(t)$ ait une transformée de Fourier, fonction de f définie selon l'expression 2.20, il faut et il suffit que :

- $x(t)$ soit une fonction bornée ;
- l'intégrale de $x(t)$ entre $-\infty$ et $+\infty$ ait une valeur finie ;
- les discontinuités de $x(t)$ ainsi que les maxima et minima soient en nombre fini.

Mais pour que la transformée de Fourier de $x(t)$ existe et soit réciproque, il suffit que $x(t)$ soit une fonction de carré sommable. Cela signifie que $x(t)$, ainsi que sa transformée de Fourier, sont à énergie finie. Toutes les fonctions existant physiquement vérifient ces conditions parce qu'on les observe sur un temps fini.

2.2.3 Propriétés de la transformée de Fourier

Soit la fonction $x(t)$ et la transformée de Fourier correspondante $X(f)$, nous écrivons :

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$$

Dans la plupart des cas, les transformées de Fourier ne sont pas calculées à partir des relations générales (équations 2.20 et 2.21), mais à partir des principales propriétés de la transformée de Fourier décrites ci-après.

a) Linéarité

$$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \xleftrightarrow{F} a \cdot X(f) + b \cdot Y(f)$$

avec a et b des constantes.

b) Homothétie (figure 2.7)

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right) \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

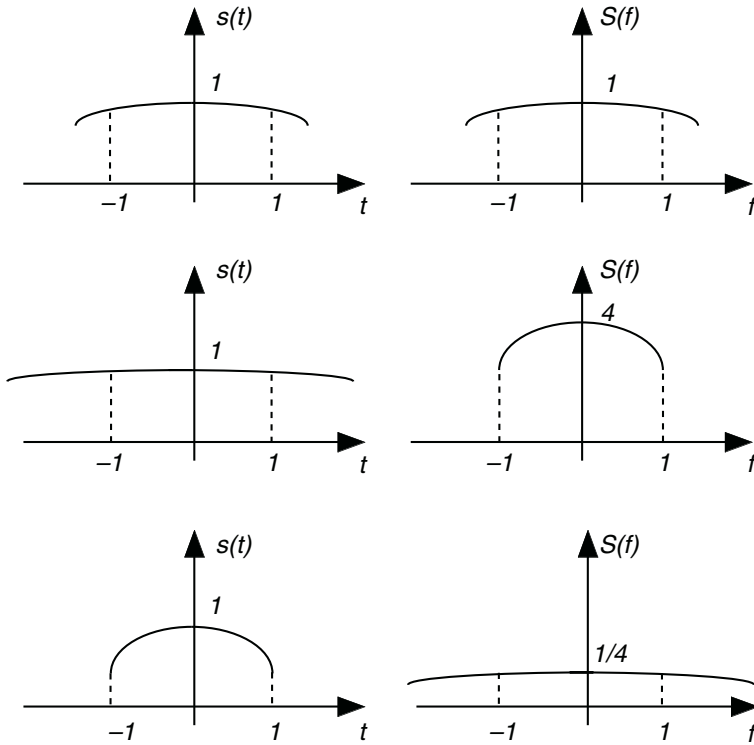


Figure 2.7. Représentation schématique de la propriété d'homothétie de la transformée de Fourier : $a = 1/4$ et $a = 4$.

Exemple. Considérons un laser impulsif « femtoseconde » dont la durée de l'impulsion τ est de 10 fs (10^{-14} s) et la longueur d'onde dans l'infrarouge proche ($\lambda = 1 \mu\text{m}$). Soit c la vitesse de la lumière, la fréquence f de cette onde lumineuse est donnée par :

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

D'où la période d'oscillation T de cette onde électromagnétique est :

$$T = \frac{\lambda}{c} = 0,33 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

Par conséquent, pendant la durée de l'impulsion, il n'y aura que 3 périodes d'oscillations. Ainsi, nous avons un signal fortement limité dans le temps, et donc un spectre large : un laser femtoseconde n'est pas monochromatique. L'étude de cet exemple sera poursuivie dans le chapitre 4 en donnant la largeur spectrale et la variation de la longueur d'onde.

c) Translation

$$x(t - a) \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot e^{-j2\pi af} \quad \text{avec } a \in \mathfrak{R}$$

et

$$x(t) \cdot e^{j2\pi bt} \xleftrightarrow{F} X(f - b) \quad \text{avec } b \in \mathfrak{R}$$

Exemple. Ces propriétés s'appliquent aussi aux signaux périodiques, dont les spectres sont obtenus par un développement en série de Fourier. Ainsi le spectre $S_2(f)$ du signal sinusoïdal $s_2(t) = \sin(2\pi F_0 t)$ peut être déduit du spectre $S_1(f)$ du signal cosinusoïdal $s_1(t) = \cos(2\pi F_0 t)$ en utilisant la propriété de translation :

Étant donné, le spectre $S_1(f)$ (équation 2.14) :

$$S_1(f) = \frac{1}{2} [\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)]$$

et

$$s_2(t) = \sin(2\pi F_0 t) = \cos\left(2\pi F_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi F_0 \left(t - \frac{T_0}{4}\right)\right)$$

La propriété de translation donne :

$$S_2(f) = S_1(f) \cdot e^{-j2\pi \frac{T_0}{4} f} = \frac{1}{2} \left[e^{-j2\pi \frac{T_0}{4} f} \cdot \delta(f + F_0) + e^{-j2\pi \frac{T_0}{4} f} \cdot \delta(f - F_0) \right]$$

En utilisant la propriété de localisation (opération « produit ») du pic de Dirac (annexe A), il vient :

$$S_2(f) = \frac{1}{2} \left[e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \delta(f + F_0) + e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \delta(f - F_0) \right]$$

soit

$$S_2(f) = \frac{j}{2} [\delta(f + F_0) - \delta(f - F_0)]$$

Ce résultat correspond à celui trouvé directement par le développement en série de Fourier (équation 2.15). Ce résultat permet de noter que les propriétés appliquées pour les spectres obtenus par transformées de Fourier sont aussi applicables aux spectres des signaux périodiques.

d) Propriétés de parité

Nous retrouvons les mêmes propriétés de parité que pour le développement en série de Fourier, augmentées de nouvelles (tableau 2.1). Ces propriétés doivent être utilisées à chaque fois qu'un calcul de transformée de Fourier est réalisé afin de vérifier si les résultats ne sont pas faux, c'est-à-dire incohérents par rapport à la propriété de parité.

TABLEAU 2.1. Propriétés de parité de la transformée de Fourier.

Signal $s(t)$	Spectre fréquentiel $S(f)$
réel quelconque	complexe (partie réelle paire, partie imaginaire impaire)
réel pair	réel pair
réel impair	Imaginaire impair
imaginaire quelconque	complexe (partie réelle impaire, partie imaginaire paire)
imaginaire pair	Imaginaire pair
imaginaire impair	réel impair
complexe pair	complexe pair
complexe impair	complexe impair

e) Dérivation

$$\frac{d(x(t))}{dt} \xleftrightarrow{F} (j2\pi f) \cdot X(f) \quad \text{et} \quad \frac{d^n(x(t))}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j2\pi f)^n \cdot X(f)$$

De cette propriété de dérivation, on en déduit la transformée des signaux à valeur moyenne nulle qui facilite le calcul du spectre de signaux comme celui de la fonction échelon unité. Soit un signal $x(t)$ de la forme :

$$x(t) = A + x_0(t) \quad \text{avec} \quad x_0(t) \quad \text{de valeur moyenne nulle} \quad (\overline{x_0(t)} = 0)$$

soit

$$x(t) = A + \int_{-\infty}^t \frac{dx_0(\tau)}{d\tau} \cdot d\tau \quad \text{avec} \quad A \quad \text{la constante d'intégration}$$

En posant $X'_0(f)$ la transformée de Fourier de $\frac{dx_0(t)}{dt}$, il vient :

$$x(t) \xleftrightarrow{F} A \cdot \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \cdot X'_0(f) \tag{2.26}$$

Cette relation est utilisée dans le calcul de la transformée de Fourier de la fonction échelon unité à la fin de ce chapitre.

f) Divers

La fonction $x(t)$ pouvant être complexe, on a la relation suivante :

si $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$, alors $\bar{x}(t) \xleftrightarrow{F} \bar{X}(-f)$ avec $\bar{x}$ signifiant le complexe conjugué.

2.2.4 Quelques signaux supplémentaires

a) Fonction « porte » ou rectangle (figure 2.8)

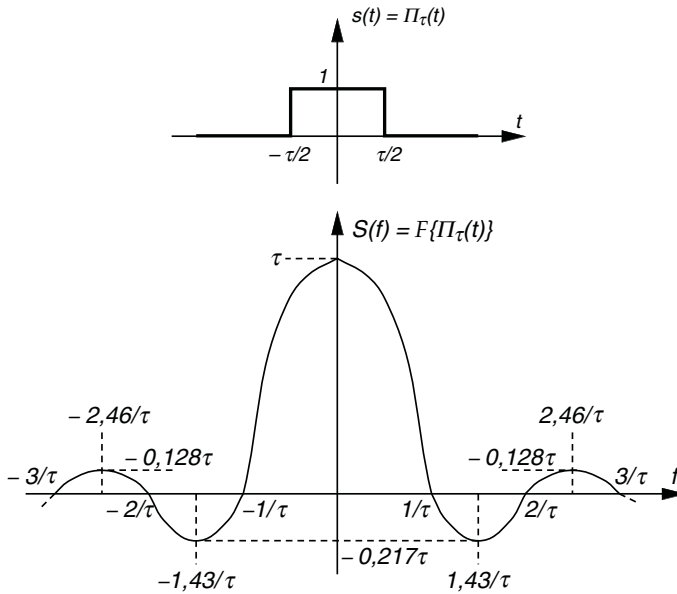


Figure 2.8. Transformée de Fourier de la fonction $\Pi_\tau(t)$, appelée « porte » ou rectangle.

Le signal « porte » $\Pi_\tau(t)$ ou rectangle est défini par :

$$\Pi_\tau(t) = 1 \quad \text{pour } |t| \leq \frac{\tau}{2} \quad \text{et} \quad \Pi_\tau(t) = 0 \quad \text{pour } |t| > \frac{\tau}{2}$$

Ce signal permet de découper dans un signal une portion de durée finie. Cette opération conduit à transformer un signal théorique (représentation mathématique) en un signal réel n'existant que pendant un temps fini, correspondant au temps de mesure ou d'observation. Le spectre de la fonction « porte » peut s'obtenir directement à partir de la définition de la transformée de Fourier (relation 2.20) :

$$F\{\Pi_\tau(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\tau(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j2\pi ft} \cdot dt = \frac{e^{+j\pi f\tau} - e^{-j\pi f\tau}}{j2\pi f} = \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi f}$$

Soit le résultat suivant :

$$F\{\Pi_\tau(t)\} = \tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} = \tau \cdot \text{sinc}(\tau f)$$

avec $\text{sinc}(x)$ la fonction « sinus cardinal » définie par : $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

Ce résultat permet d'obtenir la transformée de Fourier d'un pic de Dirac. Si l'on considère la définition donnée en annexe A, le pic de Dirac est le passage à la limite d'une fonction « porte » de largeur τ et d'amplitude A en conservant la relation $A\tau = 1$:

$$\delta(t) = \lim_{A \rightarrow +\infty, \tau \rightarrow 0, A\tau=1} \{A \cdot \Pi_\tau(t)\}$$

Si l'on considère que la limite de la transformée de Fourier est égale à la transformée de Fourier de la limite, nous avons :

$$F\{\delta(t)\} = \lim_{A \rightarrow +\infty, \tau \rightarrow 0, A\tau=1} \{F\{A \cdot \Pi_\tau(t)\}\} = \lim_{A \rightarrow +\infty, \tau \rightarrow 0, A\tau=1} \{A\tau \cdot \text{sinc}(\tau f)\}$$

Nous obtenons ainsi le résultat suivant (figure 2.9) :

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$$

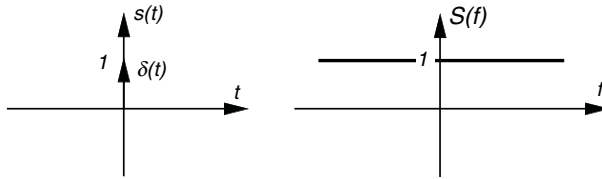


Figure 2.9. Transformée de Fourier du pic de Dirac.

b) Échelon unité ou fonction de Heaviside

Le signal « échelon unité », appelé $u(t)$, est défini par la relation suivante (figure 2.10) :

$$\begin{aligned} u(t) &= 0 && \text{pour } t < 0 \\ u(t) &= 1 && \text{pour } t \geq 0 \end{aligned}$$

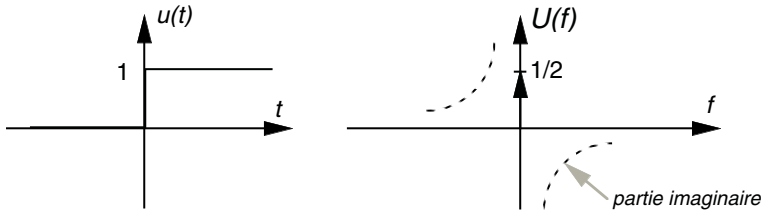


Figure 2.10. Transformée de Fourier de la fonction « Échelon unité de Heaviside ».

Cette fonction particulière est de très grande utilité car d'une part elle permet de rendre un signal quelconque $x(t)$ causal par le produit $x(t) \cdot u(t)$. Et d'autre part elle correspond à une sollicitation calibrée d'un système qui permet d'obtenir en sortie une réponse dite indicielle (chapitre 4).

Afin de pouvoir calculer des spectres de signaux faisant intervenir le signal « échelon unité », il est donc impératif de connaître son spectre $U(f)$. En utilisant le calcul de

la transformée de Fourier pour les signaux à valeur moyenne nulle (paragraphe 2.2.3), on obtient la transformée de Fourier de l'échelon unité. Le signal $u(t)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sgn}(t)$$

avec $\operatorname{sgn}(t)$ la fonction « signe » : $\operatorname{sgn}(t) = \frac{t}{|t|}$

Pour faire ce calcul, nous avons besoin de connaître la transformée de Fourier de la dérivée de cette fonction « signe ». Cette transformée s'obtient en réalisant un passage à la limite identique à celui de la présentation du pic de Dirac (figure 2.11). Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

$$\frac{d[\operatorname{sgn}(t)]}{dt} = 2 \cdot \delta(t) \xleftrightarrow{F} 2$$

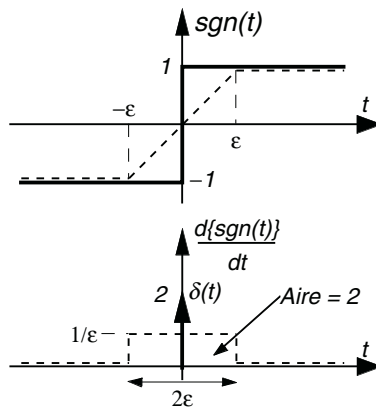


Figure 2.11. Représentation du calcul par passage à la limite de la transformée de Fourier de la dérivée de la fonction « signe » (traits pointillés : courbes avant passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$).

D'où la transformée de Fourier de $u(t)$ obtenue à partir de la transformée de Fourier d'un signal mis sous la forme d'une constante et d'une fonction de valeur moyenne nulle (équation 2.26) :

$$U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f)$$

Le signal « porte » $\Pi_\tau(t)$ peut aussi s'exprimer à partir de la somme de deux fonctions « échelon unité » :

$$\Pi_\tau(t) = u(t + \tau/2) - u(t - \tau/2)$$

c) Fonction exponentielle décroissante

Cette fonction s'exprime à partir du signal « échelon unité » $u(t)$ que nous venons d'étudier :

$$x(t) = u(t) \cdot e^{-at}$$

Dans ce cas, la manière la plus simple de calculer le spectre est d'utiliser la définition initiale de la transformée de Fourier (relation 2.20) :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-at} \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} \cdot dt = \frac{1}{(a + j2\pi f)}$$

L'annexe C regroupe quelques fonctions non périodiques et leurs transformées de Fourier.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 2.1 (Synthèse des signaux triangulaire et carré)

Cet exercice a pour but de présenter la synthèse de deux signaux périodiques réalisée à partir de leur développement en série de Fourier. Calculer les développements en série de Fourier et les expressions des spectres bilatéraux des deux signaux périodiques suivants (figure 2.12) :

- signal triangulaire impair de période T_0 , de valeur moyenne nulle et d'amplitude 2 ;
- signal carré impair de période T_0 , de valeur moyenne nulle et d'amplitude 2.

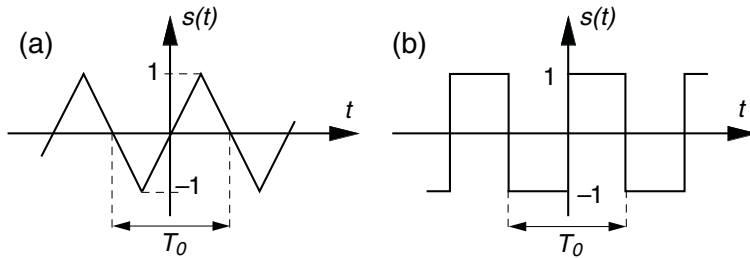


Figure 2.12. Signaux étudiés : signal triangulaire (a) et signal carré (b).

Analyser la qualité de la synthèse de ces signaux en fonction du nombre d'harmoniques pris en compte.

Solution

Les développements en série de Fourier et les expressions des spectres bilatéraux de ces signaux sont les suivants :

- signal triangulaire :

$$s(t) = \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \cdot \sin[2\pi(2p+1)F_0 t]$$

$$S(f) = \frac{4j}{\pi^2} \cdot \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \cdot \delta(f - (2p+1)F_0)$$

– signal carré :

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \cdot \sin[2\pi(2p+1)F_0t]$$

$$S(f) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \frac{-j}{2p+1} \cdot \delta(f - (2p+1)F_0)$$

La synthèse de ces signaux périodiques est limitée dans une première étape aux trois premiers harmoniques. L'étude porte uniquement sur l'influence de ces harmoniques pour la construction des signaux. Nous avons les résultats de ces synthèses représentés respectivement sur les figures 2.13a et 2.13b.

En première analyse, nous pouvons remarquer que la synthèse de signaux dont les harmoniques décroissent faiblement (en $1/n$) comme le signal carré, est difficile à obtenir avec simplement

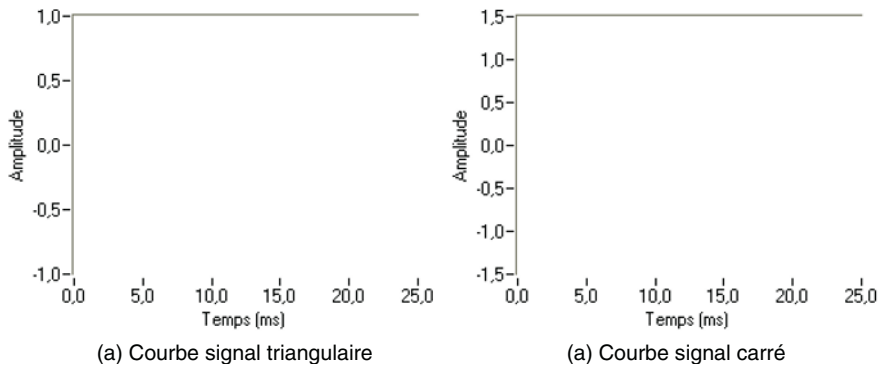


Figure 2.13. Synthèses du signal triangulaire (a) et du signal carré (b) à partir du développement en série de Fourier en utilisant les trois premiers harmoniques.

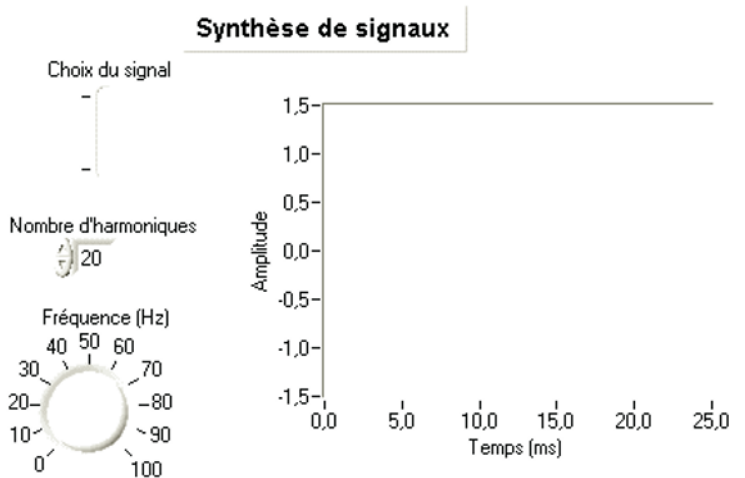


Figure 2.14. Synthèse du signal carré à partir du développement en série de Fourier en utilisant le fondamental et les 20 premiers harmoniques.

les trois premiers harmoniques. Par contre dans le cas de signaux dont les harmoniques décroissent fortement (en $1/n^2$) comme le signal triangulaire, l'élaboration du signal est plus rapide.

La réalisation précédente a donc été limitée à la synthèse de signaux périodiques à partir des trois premiers harmoniques. Les synthèses de ces deux signaux « carré » et « triangle », réalisées avec de plus nombreuses composantes (fondamental et harmoniques), permettent d'obtenir une synthèse de meilleure qualité. Nous pouvons noter une construction quasi parfaite du signal « triangle ». En revanche, pour le signal « carré », il subsiste des oscillations au niveau des transitions (phénomènes numériques de convergence des séries dit phénomène de Gibbs). Une illustration de cette synthèse du signal carré avec un nombre important de composantes (le fondamental et 20 harmoniques) est présentée sur la figure 2.14, page précédente.

Exercice 2.2 (Analyse spectrale d'un signal sinusoïdal redressé simple ou double-alternance)

La fonction de redressement d'un signal sinusoïdal a pour but d'obtenir un signal dont la composante moyenne est non nulle afin de pouvoir par la suite extraire cette composante continue pour réaliser une alimentation en tension ou courant continu. Pour cela, deux éléments sont mis en œuvre (figure 2.15, page ci-contre) :

- une fonction de redressement simple alternance (exemple d'une diode) ou double alternance (exemple d'un pont de diodes) qui permet d'obtenir une composante continue non nulle, mais qui génère des harmoniques ;
- une fonction de filtrage passe-bas qui doit éliminer ou fortement atténuer les signaux de fréquence non nulle (fondamental et harmoniques).

Calculer les spectres des deux signaux. Comparer la valeur de la composante continue obtenue.

Solution

Nous allons calculer les spectres de ces deux signaux périodiques en utilisant le développement en série de Fourier.

► Redressement simple alternance

Le signal sinusoïdal de période T_0 ($= 1/F_0$) redressé simple alternance, obtenu par l'utilisation d'une diode, s'exprime sur une période par :

$$s(t) = \sin(2\pi F_0 t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2}$$

et

$$s(t) = 0 \quad \text{pour } \frac{T_0}{2} \leq t \leq T_0$$

La valeur moyenne du signal, calculée avec la relation 2.2, donne le premier terme du développement en série de Fourier :

$$\overline{s(t)} = a_0 = 1/\pi$$

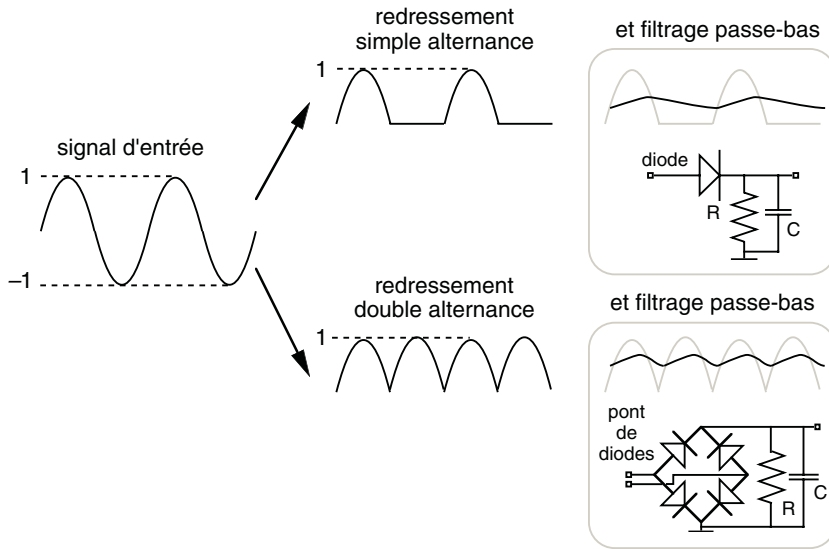


Figure 2.15. Réalisation d'un signal quasi continu avec les fonctions de redressement et ensuite de filtrage passe-bas : redressement simple alternance et redressement double alternance.

Pour obtenir le spectre de ce signal, nous allons calculer les autres coefficients de la série de Fourier à partir des relations 2.3 et 2.4. Ainsi le calcul des coefficients a_n est :

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \sin(2\pi F_0 t) \cdot \cos(2\pi n F_0 t) \cdot dt$$

Pour obtenir le résultat, il est nécessaire de décomposer le calcul en deux parties :

$$\text{si } n \text{ est pair } (n = 2p) : \quad a_{2p} = \frac{-2}{\pi(4p^2 - 1)} \quad \text{avec } p \geq 1$$

$$\text{si } n \text{ est impair } (n = 2p + 1) : \quad a_{2p+1} = 0 \quad \text{avec } p \geq 1$$

$$\text{avec le cas limite} \quad a_1 = 0$$

Le calcul des coefficients b_n est :

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \sin(2\pi F_0 t) \cdot \sin(2\pi n F_0 t) \cdot dt$$

Le résultat du calcul est :

$$b_n = 0 \quad \text{avec } n > 1$$

avec le cas limite pour $n = 1$:

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

L'expression du développement en série de Fourier de ce signal de redressement simple alternance est (figure 2.16) :

$$s(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\pi F_0 t) + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)} \cdot \cos[2\pi(2p)F_0 t]$$

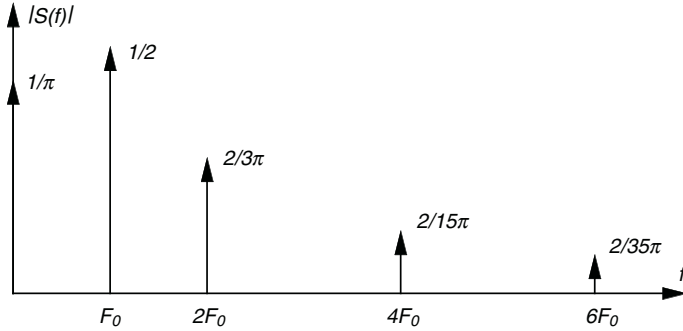


Figure 2.16. Représentation unilatérale du module du spectre d'un signal sinusoïdal redressé simple alternance.

► Redressement double alternance

Le signal sinusoïdal de période $T_0 (= 1/F_0)$ redressé double alternance, obtenu par l'utilisation d'un pont de quatre diodes, s'exprime par :

$$s(t) = |\sin(2\pi F_0 t)| \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T_0$$

La valeur moyenne du signal, calculée avec la relation 2.2, donne le premier terme du développement en série de Fourier :

$$\overline{s(t)} = a_0 = 2/\pi$$

Pour obtenir le spectre de ce signal, nous allons calculer les autres coefficients de la série de Fourier à partir des relations 2.3 et 2.4. Ainsi le calcul des coefficients a_n est :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} |\sin(2\pi F_0 t)| \cdot \cos(2\pi n F_0 t) \cdot dt \\ &= \frac{2[1 + (-1)^n]}{T_0} \cdot \int_0^{T_0/2} \sin(2\pi F_0 t) \cdot \cos(2\pi n F_0 t) \cdot dt \end{aligned}$$

Le résultat du calcul est décomposé en deux parties :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est pair } (n = 2p) : \quad & a_{2p} = \frac{-4}{\pi(4p^2 - 1)} \quad \text{avec } p \geq 1 \\ \text{si } n \text{ est impair } (n = 2p + 1) : \quad & a_{2p+1} = 0 \quad \text{avec } p \geq 1 \end{aligned}$$

Le calcul des coefficients b_n est :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} |\sin(2\pi F_0 t)| \cdot \sin(2\pi n F_0 t) \cdot dt \\
 &= \frac{2[1 + (-1)^n]}{T_0} \cdot \int_0^{T_0/2} \sin(2\pi F_0 t) \cdot \sin(2\pi n F_0 t) \cdot dt
 \end{aligned}$$

Le résultat du calcul donne des coefficients b_n nuls, résultat évident du fait de la parité paire de la fonction initiale :

$$b_n = 0 \quad \text{avec } n > 1$$

L'expression du développement en série de Fourier de ce signal de redressement double alternance est donc (figure 2.17) :

$$s(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)} \cdot \cos[2\pi(2p)F_0 t]$$

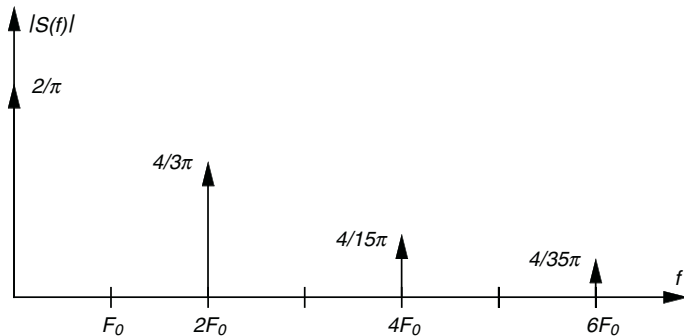


Figure 2.17. Représentation unilatérale du module du spectre d'un signal sinusoïdal redressé double alternance.

En conclusion de cet exemple d'analyse spectrale des signaux de redressements simple et double alternance, nous pouvons faire plusieurs remarques :

- la valeur moyenne ou composante continue qu'il est possible d'obtenir est deux fois plus importante dans le cas du redressement double alternance ;
- le filtrage passe-bas à réaliser afin d'éliminer les composantes fréquentielles est plus difficile dans le cas d'un redressement simple alternance du fait de l'existence de la composante à F_0 de forte amplitude ;
- enfin, cette même composante F_0 peut être utilisée pour la maintenance des systèmes électroniques avec alimentation continue réalisée avec pont à diodes : si la présence de cette fréquence F_0 (c'est-à-dire 50 Hz) est décelée sur l'alimentation des circuits, c'est le signe d'une panne de l'alimentation continue à redressement double alternance.

Exercice 2.3 (Spectre d'une suite périodique d'impulsions)

Nous allons étudier un signal périodique $s(t)$ de période $T_0 (= 1/F_0)$ formé d'impulsions de largeur τ . Le signal carré est le cas particulier pour lequel $\tau = T_0/2$. Dans cette hypothèse, considérons l'expression du spectre du signal carré impair et de valeur moyenne nulle étudié au paragraphe 2.1.4 (équation 2.18 et figure 2.6, page 25). À partir de ce résultat, établir les spectres des deux signaux « carré » présentés sur la figure 2.18 en utilisant uniquement les propriétés associées à la transformation de Fourier (linéarité et translation temporelle). Discuter la forme de ces spectres.

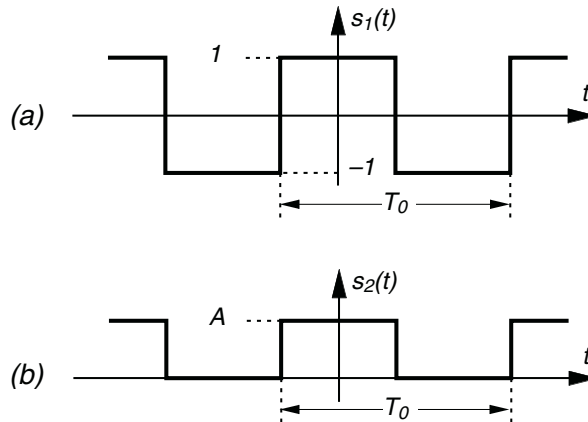


Figure 2.18. Signaux carré à étudier : (a) signal carré pair à valeur moyenne nulle, (b) signal carré pair à valeur moyenne non nulle.

Calculer la représentation spectrale bilatérale du signal impulsionnel présenté sur la figure 2.19 dont le cas particulier carré pour $\tau = T_0/2$ vient d'être étudié.

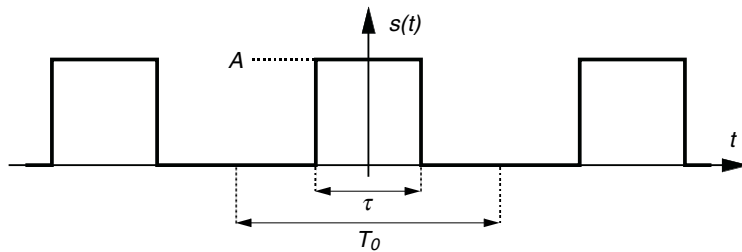


Figure 2.19. Représentation temporelle d'un signal formé d'une suite périodique d'impulsions.

De la même manière que pour la définition du pic de Dirac, on définit un « peigne de Dirac » de période T_0 (suite périodique de pics de Dirac) comme le passage à la limite du signal étudié précédemment en faisant tendre A

vers l'infini, τ vers 0 et en conservant le produit $A\tau$ égal à 1. Soit :

$$\text{Pgn}_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_0)$$

Calculer sa représentation spectrale bilatérale.

Solution

Le signal carré impair et de valeur moyenne nulle, étudié au paragraphe 2.1.4, a pour développement en série de Fourier et pour spectre les expressions suivantes :

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi(2n+1)F_0 t)}{2n+1}$$

et

$$S(f) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{(2n+1)} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0)$$

Le signal carré $s_1(t)$ peut se déduire du signal carré précédent par une translation de $-\frac{T_0}{4}$, soit $s_1(t) = s\left(t + \frac{T_0}{4}\right)$ (figure 2.18a, page ci-contre). Le spectre $S_1(f)$ peut donc se déduire du spectre $S(f)$ par la relation suivante (propriété de translation des transformations de Fourier) :

$$S_1(f) = S(f) \cdot e^{+j2\pi \frac{T_0}{4} f}$$

D'où le calcul :

$$S_1(f) = \left[\frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{(2n+1)} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0) \right] \cdot e^{+j2\pi \frac{T_0}{4} f}$$

$$S_1(f) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{(2n+1)} \cdot e^{+j\frac{\pi}{2}(2n+1)} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0)$$

$$S_1(f) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0)$$

Ce signal carré réel et pair de période T_0 avec une amplitude comprise entre +1 et -1 centré par rapport au temps $t = 0$ avec une valeur moyenne égale à 0 a un spectre réel et pair (figure 2.20a, page suivante).

Le signal carré $s_2(t)$ peut se déduire du signal carré précédent $s_1(t)$ par un décalage en amplitude (produit par une constante $A/2$ et addition avec la constante $A/2$), soit (figure 2.18b, page ci-contre) :

$$s_2(t) = \frac{A}{2} s_1(t) + \frac{A}{2}$$

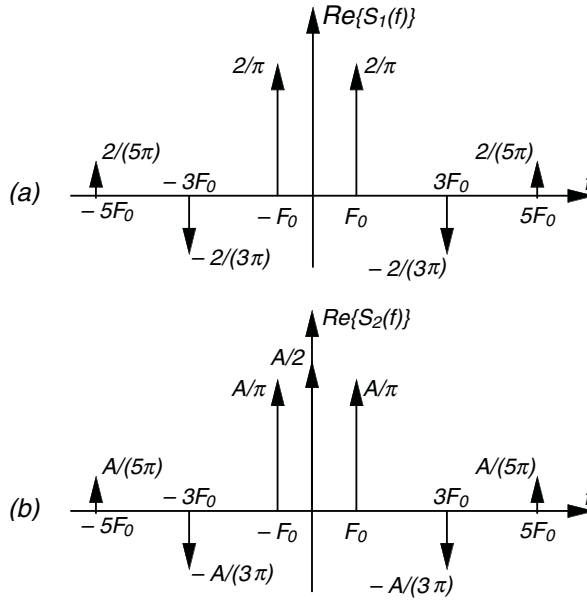


Figure 2.20. Spectres des signaux carré à étudier : (a) signal carré pair à valeur moyenne nulle, (b) signal carré pair à valeur moyenne non nulle.

Le spectre $S_2(f)$ peut donc se déduire du spectre $S_1(f)$ par la relation suivante (propriété de linéarité des transformations de Fourier) :

$$S_2(f) = \frac{A}{2}S_1(f) + \frac{A}{2}\delta(f)$$

Soit le résultat :

$$S_2(f) = \frac{A}{2}\delta(f) + \frac{A}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0)$$

Ce signal carré réel et pair de période T_0 avec une amplitude comprise entre $+A$ et 0 centré par rapport au temps $t = 0$ avec une valeur moyenne égale à $A/2$ a un spectre réel et pair (figure 2.20b). Ce spectre sera comparé au résultat que nous allons obtenir pour le signal formé d'une suite périodique d'impulsions.

Considérons le cas général d'une suite périodique d'impulsions de largeur τ et de période T_0 (figure 2.19, page 40). La représentation spectrale bilatérale peut s'écrire suivant la relation 2.11, soit :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} S(nF_0) \cdot \delta(f - nF_0)$$

avec

$$S(nF_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j2\pi nF_0 t} \cdot dt = \frac{A\tau}{T_0} \cdot \frac{\sin(\pi nF_0 \tau)}{\pi nF_0 \tau}$$

Étant donné la propriété de localisation du pic de Dirac (annexe A), le spectre du signal, représenté sur la figure 2.21, peut s'exprimer sous les deux formes suivantes :

$$S(f) = \frac{A\tau}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\sin(\pi n F_0 \tau)}{\pi n F_0 \tau} \cdot \delta(f - n F_0)$$

ou

$$S(f) = \frac{A\tau}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot \delta(f - n F_0)$$

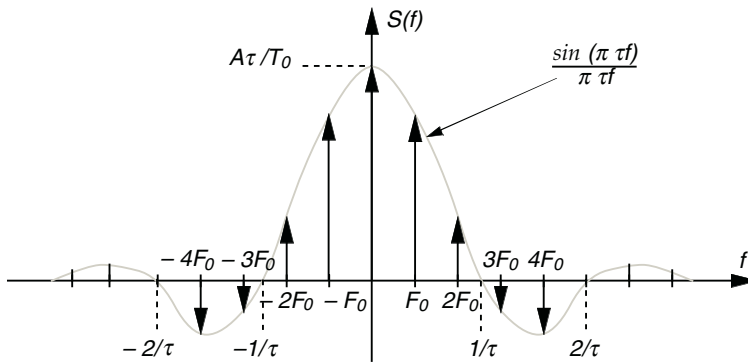


Figure 2.21. Représentation spectrale d'un signal formé d'une suite périodique d'impulsions.

Il est intéressant de remarquer que le spectre représenté sur la figure 2.20b, page ci-contre est identique au spectre que nous venons de calculer en donnant la valeur particulière $\tau = T_0/2$. Ainsi le spectre d'un signal carré pair à valeur moyenne non nulle ne contient pas de composante fréquentielle paire car ces raies se situent aux abscisses de passage par zéro de la fonction $\text{sinc}(\tau f)$.

Le pic de Dirac, utilisé pour représenter mathématiquement les spectres discrets des signaux périodiques, a été introduit comme le passage à la limite d'une impulsion de largeur τ et d'une amplitude A en faisant tendre A vers l'infini, τ vers 0 et en conservant le produit $A\tau$ égal à 1 (annexe A). De la même manière, on définit un « peigne de Dirac » $\text{Pgn}_{T_0}(t)$ de période T_0 (suite périodique de pics de Dirac) comme le passage à la limite du signal étudié précédemment (figure 2.22, page suivante).

Pour connaître le spectre du peigne de Dirac $\text{Pgn}_{T_0}(t)$, nous allons utiliser le passage à la limite du spectre du signal, formé d'une suite périodique d'impulsions, utilisé pour définir le peigne de Dirac. Le spectre de la suite périodique d'impulsions précédemment étudié étant donné, le spectre du peigne temporel de Dirac, de période T_0 , est un peigne de Dirac de période F_0 avec une constante multiplicative F_0 (figure 2.23, page suivante) :

$$\text{Pgn}_{T_0}(t) \xleftrightarrow{F} F_0 \cdot \text{Pgn}_{F_0}(f) = F_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(f - n F_0)$$

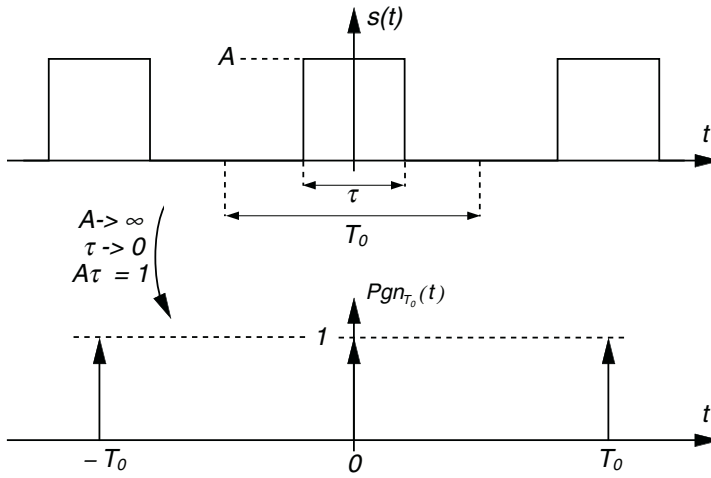


Figure 2.22. Définition du peigne de Dirac $Pgn_{T_0}(t)$.

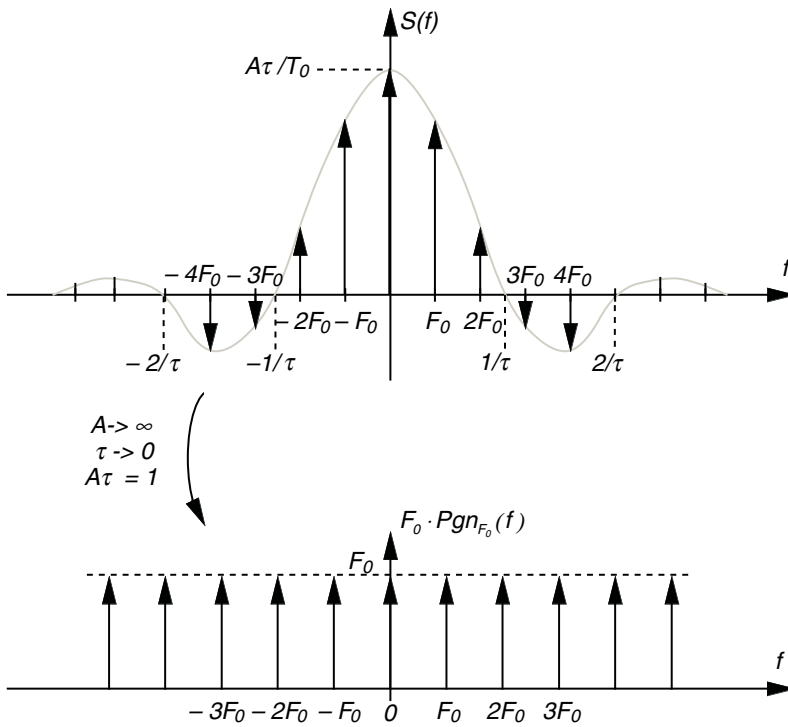


Figure 2.23. Spectre de la suite périodique de pics de Dirac appelée « peigne de Dirac ».

Chapitre 3

Systèmes de transmission

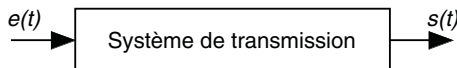
3.1 DÉFINITION. UNITÉ DE COMPARAISON. BANDE PASSANTE

3.1.1 Définition et unité de comparaison

Un système de transmission fait correspondre à un signal d'entrée $e(t)$ quelconque un signal de sortie $s(t)$, relation que nous notons :

$$e(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} s(t)$$

Le signal de sortie $s(t)$ ou réponse du système de transmission est fonction du signal d'entrée $e(t)$ et des caractéristiques du système de transmission :



Un premier moyen de caractériser cette grandeur $s(t)$ est de la comparer au signal d'entrée. Cette comparaison se fait en général en exprimant le rapport des puissances des deux grandeurs (de même nature) par le logarithme à base 10 de leur rapport. Ce rapport est alors exprimé en « bel » ; mais l'unité pratique est le décibel :

$$A_{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10}(s(t)/e(t)) \quad (\text{en décibel ou abréviation dB})$$

a) Gain en puissance

Si on compare pour un appareil (par exemple un amplificateur), les puissances d'entrée et de sortie, le rapport en puissance est :

$$A_{p_{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_s}{P_e} \right) \quad (3.1)$$

avec un gain si $A_{p_{dB}} > 0$ et un affaiblissement si $A_{p_{dB}} < 0$.

Si on exprime ce rapport en puissance en fonction des tensions V_e et V_s aux bornes des charges résistives R_e et R_s où sont débités respectivement les courants I_e et I_s , on obtient :

$$A_{p_{dB}} = 10 \log_{10} \left[\frac{V_s^2}{V_e^2} \cdot \frac{R_e}{R_s} \right] = 10 \log_{10} \left[\frac{I_s^2}{I_e^2} \cdot \frac{R_s}{R_e} \right] \quad (3.2)$$

Dans le cas de résistances identiques ($R_e = R_s$), le rapport en puissance s'exprimera par les seules tensions ou courants :

$$A_{p_{dB}} = 20 \log_{10} \left[\frac{V_s}{V_e} \right] = 20 \log_{10} \left[\frac{I_s}{I_e} \right] \quad (3.3)$$

b) Gain en tension

Par convention, on adoptera pour les tensions la relation de comparaison en dB suivante :

$$A_{p_{dB}} = 20 \cdot \log_{10} \left[\frac{V_s}{V_e} \right] \quad (3.4)$$

Cette convention permet d'exprimer, par un même nombre, le rapport en tension et le gain en puissance si les résistances (ou impédances) d'entrée et de sortie sont identiques. Quelques valeurs utiles sont données dans le tableau 3.1.

TABLEAU 3.1. Valeur du gain en dB pour différents rapports de tension.

Rapport des tensions V_s/V_e	1/10	1/2	$1/\sqrt{2}$	2	10	100
Gain ou affaiblissement en dB	-20	-6	-3	6	20	40

3.1.2 Bande passante

Cette comparaison des puissances ou tensions d'entrée et de sortie d'un système de transmission est utilisée lorsque l'on veut étudier l'influence d'une autre grandeur : par exemple la fréquence.

On considère une tension sinusoïdale, fournissant à l'entrée supposée résistive (indépendante de la fréquence), une puissance moyenne constante quelle que soit la fréquence : P_e constant. On étudie l'évolution de la puissance de sortie sur une charge résistive en fonction de la fréquence : $P_s = P_s(f)$. P_s passe par un maximum P_{sm} considéré comme référence.

On appellera bande passante du système de transmission la zone de fréquences pour lesquelles on a :

$$\frac{P_s}{P_{sm}} \geq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad A_{\text{pdB}} \geq -3 \text{ dB} \quad (3.5)$$

La bande passante à 3 dB est la tranche des fréquences pour lesquelles l'affaiblissement de la puissance de sortie, à puissance entrante constante, est inférieur à 3 dB par rapport à sa valeur maximale (figure 3.1).

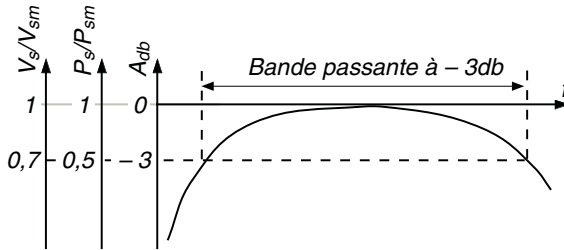


Figure 3.1. Définition de la bande passante à -3 dB d'un système de transmission.

Si l'on applique cette définition pour les tensions, on obtient le rapport de la tension de sortie V_s et de la tension de sortie maximale V_{sm} , définie de la même manière que pour la puissance, devant vérifier la relation suivante :

$$V_s/V_{sm} \geq 1/\sqrt{2}$$

On définit également une bande passante à 6 dB pour laquelle on a :

$$V_s/V_{sm} \geq 1/2$$

3.2 PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES DE TRANSMISSION

Nous allons nous intéresser à des systèmes de transmission qui possèdent les trois propriétés suivantes : linéarité, continuité et stationnarité.

3.2.1 Systèmes linéaires

En considérant $s_1(t)$ réponse de $e_1(t)$ et $s_2(t)$ réponse de $e_2(t)$, le système de transmission est dit linéaire si :

$$a \cdot e_1(t) + b \cdot e_2(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t) \quad (3.6)$$

Il est important de remarquer que presque tous les systèmes sont linéaires pour les faibles signaux (première approximation). D'autre part, une des conséquences de la linéarité est que, pour prévoir la réponse à une action quelconque, il suffit de

connaître la réponse pour une collection dénombrable de signaux d'entrée. Un signal quelconque $e(t)$ pouvant s'exprimer sous la forme :

$$e(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} [a_i \cdot e_i(t)]$$

et $s_i(t)$ étant les réponses aux signaux $e_i(t)$, l'extension de la propriété de linéarité s'écrit de la façon suivante :

$$e(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} [a_i \cdot e_i(t)] \xrightarrow{\text{S.T.}} s(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} [a_i \cdot s_i(t)] \quad (3.7)$$

3.2.2 Systèmes continus

Soit $s_n(t)$ la suite des réponses aux signaux d'entrée $e_n(t)$, le système est dit continu si nous avons la propriété suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(t) \xrightarrow{\text{S.T.}} \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(t) \quad (3.8)$$

Exemple. Il est intéressant de noter qu'un « intégrateur pur » est un système continu, mais pas un « dérivateur pur ». En effet considérons les signaux paramétrés par n de la forme :

$$e_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n}$$

Nous avons le passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(t) = 0$$

- Pour un système de transmission de type « intégrateur pur », nous avons :

$$s_n(t) = \int_0^t e_n(t) \cdot dt = \int_0^t \frac{\sin(nt)}{n} \cdot dt = \frac{1 - \cos(nt)}{n^2}$$

et le passage à la limite de cette collection de signaux de sortie est :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(t) = 0 = \int_0^t \lim_{n \rightarrow +\infty} e_n(t) \cdot dt$$

Par conséquent, le système de transmission de type « intégrateur pur » est un système continu.

- Pour un système de transmission de type « dérivateur pur », nous avons :

$$s_n(t) = \frac{de_n(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right] = \cos(nt)$$

Il n'y a donc pas de convergence des signaux de sortie. Le système de transmission de type « dérivateur pur » n'est pas un système continu.

3.2.3 Systèmes stationnaires

Un système est stationnaire si son comportement est indépendant de l'origine du temps, donc, si $s(t)$ est la réponse à $e(t)$, nous avons :

$$e(t - \theta) \xrightarrow{\text{S.T.}} s(t - \theta) \quad (3.9)$$

Définition. Les filtres sont définis comme des systèmes de transmission linéaires, continus et stationnaires.

3.3 FILTRES ET CONVOLUTION

3.3.1 Définition

Une impulsion brève, injectée à l'entrée d'un système de transmission linéaire, continu et stationnaire, ne donne jamais en sortie une impulsion infiniment brève mais un signal de durée finie. Cette réponse est appelée *réponse impulsionnelle* (ou *percussionnelle*) du filtre et notée $h(t)$. Dans le cas général pour signal d'entrée quelconque, nous voulons établir une relation mathématique qui lie le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$ pour un système de transmission possédant les trois propriétés vues précédemment que nous noterons S.T.-L.C.S., soit :

$$e(t) \xrightarrow{\text{S.T. - L.C.S.}} s(t)$$

Premièrement, $h(t)$ étant la réponse impulsionnelle à un signal d'entrée $\delta(t)$ (impulsion de Dirac), la propriété de stationnarité du système de transmission étudié permet de dire que la réponse à un signal $\delta(t - t_0)$, obtenu par translation de t_0 , correspond un signal de sortie $h(t - t_0)$ ayant subi la même translation (figure 3.2) :

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{S.T. - L.C.S.}} h(t) \quad \text{et} \quad \delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{S.T. - L.C.S.}} h(t - t_0)$$

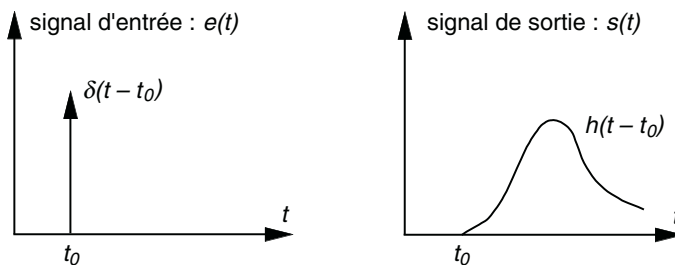


Figure 3.2. Réponse impulsionnelle d'un système de transmission.

Si nous considérons une sollicitation de notre système de transmission par une impulsion de type porte de largeur Δt et d'amplitude $1/\Delta t$, nous obtenons une

réponse que nous allons noter $h_{\Delta t}(t)$. Le passage à la limite quand $\Delta t \rightarrow 0$, nous donne la réponse impulsionnelle définie précédemment :

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \Pi_{\Delta t}(t) \xrightarrow{\text{S.T. - L.C.S.}} h_{\Delta t}(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{h_{\Delta t}(t)\} = h(t)$$

Étant donné les propriétés de linéarité et de stationnarité de notre filtre, la réponse à la même impulsion d'amplitude A et décalée temporellement de $i \cdot \Delta t$ est :

$$A \cdot \Pi_{\Delta t}(t - i \cdot \Delta t) \xrightarrow{\text{S.T. - L.C.S.}} A \cdot h_{\Delta t}(t - i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$$

Soit un signal d'entrée quelconque $e(t)$, on peut le décomposer en une suite d'impulsions de largeur Δt (figure 3.3). Chacune de ces impulsions a une amplitude égale à celle du signal à cet instant : $e(0), e(\Delta t), \dots, e(i\Delta t) \dots$. De la même manière que pour l'impulsion précédente, le passage à la limite de ce signal composite $e_{\Delta t}(t)$ quand $\Delta t \rightarrow 0$, nous donne le signal d'entrée $e(t)$:

$$e_{\Delta t}(t) = \sum_i e(i \cdot \Delta t) \cdot \Pi_{\Delta t}(t - i \cdot \Delta t) \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{e_{\Delta t}(t)\} = e(t)$$

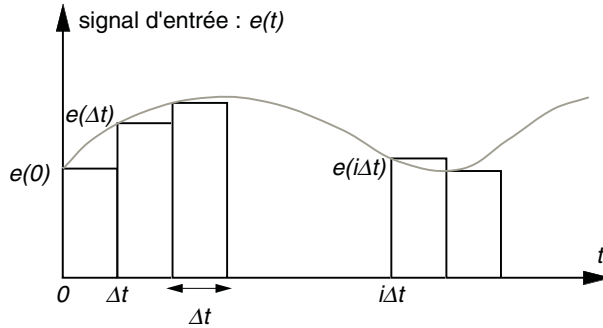


Figure 3.3. Décomposition d'un signal quelconque en impulsions.

La réponse à ce signal $e_{\Delta t}(t)$ correspond à la somme des réponses à toutes les impulsions de largeur Δt et d'amplitude $e(i\Delta t)$, soit

$$e_{\Delta t}(t) = \sum_i e(i \cdot \Delta t) \cdot \Pi_{\Delta t}(t - i \cdot \Delta t) \xrightarrow{\text{S.T. - L.C.S.}} s_{\Delta t}(t) = \sum_i e(i \cdot \Delta t) \cdot h_{\Delta t}(t - i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$$

D'après la propriété de continuité, le passage à la limite de ce signal composite $s_{\Delta t}(t)$ quand $\Delta t \rightarrow 0$, nous donne le signal sortie $s(t)$, réponse à $e(t)$, soit :

$$s(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{s_{\Delta t}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

Cette intégrale correspond à l'opération dite de convolution, notée « * », soit :

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \quad (3.10)$$

La convolution exprime la réponse à un signal quelconque à partir de celle à un signal type (réponse impulsionnelle) ; la réponse dépend du filtre, caractérisé par $h(t)$, et de l'histoire du signal.

Définition. Les *filtres*, qui sont définis comme des systèmes de transmission linéaires, continus et stationnaires, sont des *systèmes de convolution*.

3.3.2 Propriétés de la convolution

a) Commutativité

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

b) Distributivité

L'opération de convolution est distributive par rapport à l'addition :

$$x(t) * [y(t) + z(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

c) Associativité

$$x(t) * [y(t) * z(t)] = [x(t) * y(t)] * z(t) = x(t) * y(t) * z(t)$$

d) Élément neutre

L'élément neutre de l'opération de convolution est le pic de Dirac $\delta(t)$, soit :

$$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$$

3.3.3 Calcul pratique de la convolution

Le calcul de la convolution peut être décrit en plusieurs étapes (figure 3.4, page suivante). Si l'on cherche la réponse $s(t)$ à un instant donné t d'un signal $e(t)$ passant dans le filtre caractérisé par la réponse impulsionnelle $h(t)$, Il faut :

- réaliser la fonction $h(t - \tau)$ en retournant la fonction $h(t)$ et décalant de τ (figure 3.5, page suivante) ;
- faire le produit $e(\tau)h(t - \tau)$;
- intégrer la valeur de ce produit (variable τ). La valeur de cette intégrale est la valeur de $s(t)$ à l'instant t ; pour avoir l'ensemble de la fonction $s(t)$, on doit recommencer ces opérations.

3.3.4 Théorème de Plancherel

Le théorème de Plancherel concerne une relation très importante entre la transformée de Fourier et le produit de convolution qui s'énonce sous la forme suivante :

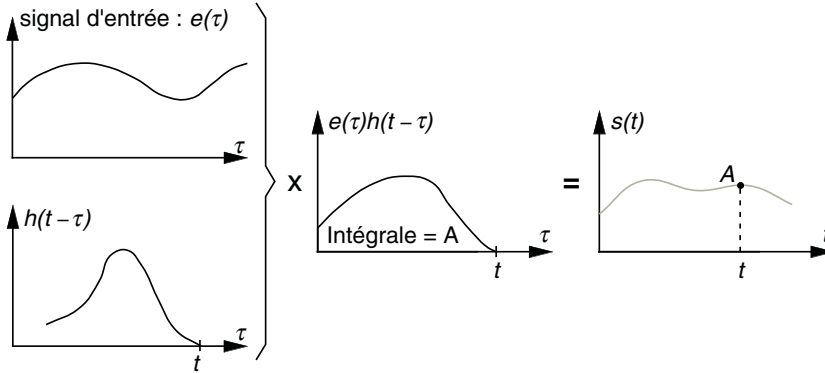


Figure 3.4. Visualisation de la complexité du calcul pratique de la convolution : pour chaque point, il faut réaliser le produit de deux fonctions et l'intégrale de celui-ci.

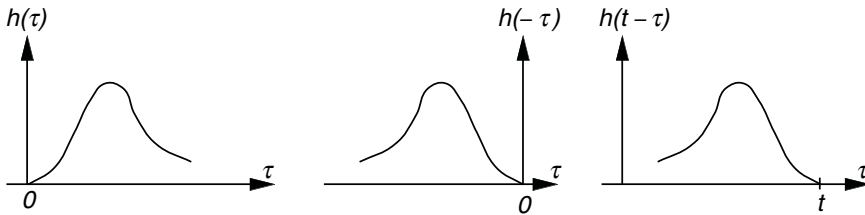


Figure 3.5. Réalisation de la fonction $h(t - \tau)$: à partir de la fonction $h(t)$ faire la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis décaler de $+t$ sur l'axe des abscisses.

Théorème de Plancherel. *La transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement.*

Ainsi, pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ ayant pour transformées de Fourier respectives $X(f)$ et $Y(f)$, nous avons :

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{F} X(f) \cdot Y(f) \quad (3.11)$$

et

$$x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{F} X(f) * Y(f) \quad (3.12)$$

La démonstration de ce théorème utilise la relation de définition de la transformée de Fourier (équation 2.20), soit :

$$F\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

et

$$F\{y(t)\} = Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

Soit le signal $z(t)$, résultat de la convolution de $x(t)$ et $y(t)$, nous avons :

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) \cdot d\tau$$

Calculons la transformée de Fourier $Z(f)$ de ce signal $z(t)$:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) * y(t)] \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

soit

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) \cdot d\tau \right] \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

ou encore

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot d\tau \right] \cdot dt$$

En écrivant $e^{-j2\pi f t} = e^{-j2\pi f \tau} \cdot e^{-j2\pi f (t - \tau)}$, il vient :

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau}] \cdot [y(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi f (t - \tau)}] \cdot d\tau \right] \cdot dt$$

Comme les deux intégrales peuvent être inversées, nous avons :

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi f (t - \tau)} \cdot dt \right] \cdot d\tau$$

en posant $\theta = t - \tau$ dans la deuxième intégrale, on obtient :

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(\theta) \cdot e^{-j2\pi f \theta} \cdot d\theta \right] \cdot d\tau$$

Puisque la deuxième intégrale est indépendante de τ , nous pouvons écrire $Z(f)$ sous la forme d'un produit de deux intégrales :

$$Z(f) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \cdot d\tau \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(\theta) \cdot e^{-j2\pi f \theta} \cdot d\theta \right]$$

soit le résultat attendu : $Z(f) = X(f) * Y(f)$

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, ce théorème est particulièrement important dans l'étude des filtres (chapitre 4).

3.3.5 Convolution des signaux périodiques

Pour deux signaux périodiques réels $x(t)$ et $y(t)$ de période T_0 , on définit la convolution de la manière suivante :

$$x(t) * y(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau) \cdot y(t - \tau) \cdot d\tau$$

3.4 INTRODUCTION À LA NOTION DE CORRÉLATION

3.4.1 Puissance et énergie des signaux

Toute transmission d'information est liée à une transmission d'énergie. Lorsque l'on fait une mesure, le processus subit toujours un prélèvement d'énergie de la part du dispositif de mesure. Cette notion de puissance d'un signal est donc très importante. On peut caractériser un signal selon les critères de puissance et d'énergie dans le plan temporel ou fréquentiel.

a) Puissance temporelle d'un signal

La puissance instantanée d'un signal $x(t)$ s'exprime sous la forme (paragraphe 1.2.2) :

$$p(t) = x(t) \cdot \bar{x}(t) = |x(t)|^2 \quad (3.13)$$

La puissance moyenne d'un signal $x(t)$ sur une durée T_0 est :

$$p(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) \cdot \bar{x}(t) \cdot dt$$

D'où l'énergie totale du signal $x(t)$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \bar{x}(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \cdot dt \quad (3.14)$$

Nous pouvons aussi définir la puissance instantanée d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sous la forme suivante :

$$p_{xy}(t) = x(t) \cdot \bar{y}(t) \quad \text{et} \quad p_{yx}(t) = y(t) \cdot \bar{x}(t) \quad (3.15)$$

Nous pouvons remarquer que ces deux puissances $p_{xy}(t)$ et $p_{yx}(t)$ sont identiques si les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont réels. La puissance moyenne d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sur une durée T_0 est donnée par :

$$P_{xy}(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) \cdot \bar{y}(t) \cdot dt \quad \text{et} \quad P_{yx}(t, T_0) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} y(t) \cdot \bar{x}(t) \cdot dt$$

Nous pouvons définir la puissance moyenne d'interaction de deux signaux non limités dans le temps par les relations suivantes :

$$P_{xy}(t) = \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) \cdot \bar{y}(t) \cdot dt \right\}$$

et

$$P_{yx}(t) = \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} y(t) \cdot \bar{x}(t) \cdot dt \right\}$$

b) Puissance fréquentielle d'un signal, densité spectrale

Si le signal $x(t)$ a une transformée de Fourier $X(f)$, on définit le spectre de puissance d'un signal ou *densité spectrale* par :

$$S_{xx}(f) = X(f) \cdot \bar{X}(f) = |X(f)|^2 \quad (3.16)$$

L'énergie contenue dans une bande de fréquence de largeur Δf autour d'une fréquence F_0 est :

$$E_x(\Delta f, F_0) = \int_{F_0 - \Delta f/2}^{F_0 + \Delta f/2} S_{xx}(f) \cdot df$$

L'énergie totale contenue dans le spectre $X(f)$ s'exprime sous la forme :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \bar{X}(f) \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \cdot df \quad (3.17)$$

Nous pouvons aussi définir la densité spectrale d'interaction de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ de transformées de Fourier respectives $X(f)$ et $Y(f)$ par :

$$S_{xy}(f) = X(f) \cdot \bar{Y}(f) \quad \text{et} \quad S_{yx}(f) = Y(f) \cdot \bar{X}(f) \quad (3.18)$$

3.4.2 Corrélation et densité spectrale

a) Définition des fonctions de corrélation pour les signaux à énergie finie

La fonction d'autocorrélation d'un signal $x(t)$ est définie par :

$$C_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \bar{x}(\tau - t) \cdot d\tau \quad (3.19)$$

La fonction d'intercorrélation de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ est définie par :

$$C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \bar{y}(\tau - t) \cdot d\tau \quad (3.20)$$

Les fonctions de corrélation traduisent la similitude d'un signal ou de deux signaux au niveau de la forme et de la position en fonction du paramètre de translation t . Dans le cas de la fonction d'autocorrélation, c'est une étude de la ressemblance du processus avec lui-même au cours du temps, et, par conséquent, si le signal est périodique, la fonction d'autocorrélation permettra de détecter cette périodicité.

La fonction d'autocorrélation $C_{xx}(t)$ possède deux propriétés importantes. Pour des signaux réels, la fonction d'autocorrélation est paire, soit :

$$C_{xx}(t) = C_{xx}(-t)$$

En effet si le signal $x(t)$ est réel, nous avons :

$$C_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \bar{x}(\tau - t) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(\tau - t) \cdot d\tau$$

et

$$C_{xx}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(\tau + t) \cdot d\tau$$

En posant $\theta = \tau + t$, nous avons $d\theta = d\tau$; il vient :

$$C_{xx}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta - t) \cdot x(\theta) \cdot d\theta = C_{xx}(t)$$

D'autre part la fonction d'autocorrélation a sa valeur maximale pour $t = 0$:

$$|C_{xx}(t)| \leq C_{xx}(0)$$

Cette relation se comprend intuitivement par le fait que la fonction d'autocorrélation étant une analyse de la ressemblance d'un signal avec lui-même, le résultat de cette comparaison est maximum lorsque le signal n'est pas décalé temporellement ($t = 0$), c'est-à-dire identique à lui-même.

b) Relation avec la densité spectrale d'énergie

Considérons la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale d'un signal $x(t)$ quelconque :

$$F^{-1}\{S_{xx}(f)\} = F^{-1}\{|X(f)|^2\} = F^{-1}\{X(f) \cdot \bar{X}(f)\} = F^{-1}\{X(f)\} * F^{-1}\{\bar{X}(f)\}$$

soit

$$F^{-1}\{S_{xx}(f)\} = x(t) * \bar{x}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(\tau - t) \cdot d\tau = C_{xx}(t)$$

D'où relation suivante :

$$C_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(\tau - t) \cdot d\tau \xleftrightarrow{F} S_{xx}(f) \quad (3.21)$$

Et pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$:

$$C_{xy}(t) \xleftrightarrow{F} S_{xy}(f) \quad \text{et} \quad C_{yx}(t) \xleftrightarrow{F} S_{yx}(f)$$

Ainsi la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du signal représente la densité spectrale de l'énergie, c'est-à-dire la redistribution de l'énergie du signal sur l'axe des fréquences. Aussi il sera souvent plus facile de calculer la fonction d'autocorrélation ou d'intercorrélation d'un signal en passant par son spectre ou sa densité spectrale.

Exemple. Considérons l'exemple du signal « porte » de largeur τ : $\Pi_\tau(t)$. La transformée de Fourier de ce signal porte, calculée précédemment (paragraphe 2.2.4), est :

$$F\{\Pi_\tau(t)\} = \tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} = \tau \cdot \text{sinc}(\tau f)$$

La densité spectrale de ce signal « porte » est donc :

$$S_{xx}(f) = \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right]^2$$

Étant donné que la fonction « porte » est une fonction réelle et paire, la fonction d'autocorrélation de ce signal s'exprime sous la forme suivante :

$$C_{xx}(t) = \Pi_\tau(t) * \overline{\Pi_\tau}(-t) = \Pi_\tau(t) * \Pi_\tau(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\tau(\theta) \cdot \Pi_\tau(\theta - t) \cdot d\theta$$

Le calcul de cette intégrale peut être facilement obtenu en raisonnant sur la figure 3.6, page suivante. En effet ce calcul se résume à un calcul d'aire résultant de l'intersection de deux rectangles. Un rectangle correspondant au signal « porte » centré en $\theta = 0$ et l'autre rectangle correspondant à la fonction « porte » décalé de t . Le résultat s'exprime avec la fonction triangle, notée $\Lambda_{2\tau}(t)$, de base égale à 2τ et d'amplitude maximale 1 en $t = 0$:

$$C_{xx}(t) = \tau \cdot \Lambda_{2\tau}(t)$$

Ce résultat sera utilisé pour le calcul du spectre d'une fenêtre temporelle de forme triangulaire (chapitre 8).

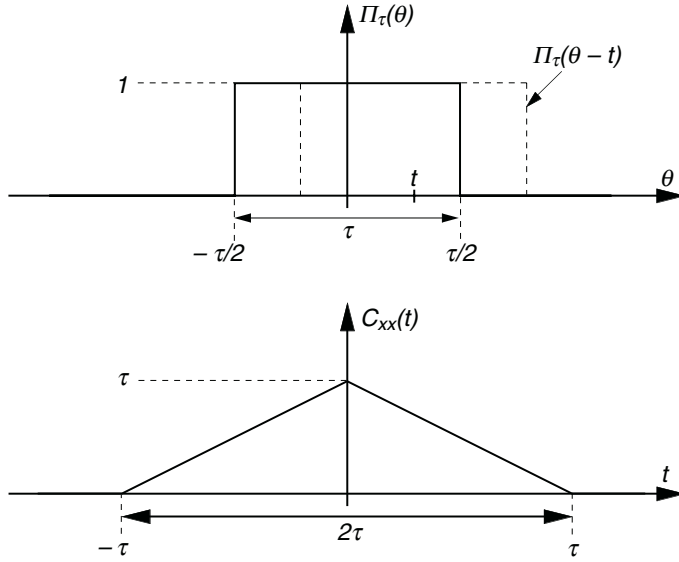


Figure 3.6. Fonction d'autocorrélation de la fonction porte.

c) Corrélation de signaux périodiques

Pour un signal périodique réel $x(t)$ de période T_0 , on définit la corrélation de la manière suivante :

$$C_{xx}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau) \cdot x(\tau - t) \cdot d\tau \quad (3.22)$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, tous les signaux périodiques peuvent s'exprimer sous la forme d'un développement en série de Fourier (relation 2.1) :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n F_0 t) + b_n \sin(2\pi n F_0 t)]$$

En appliquant la relation précédente de définition de la corrélation, nous obtenons la fonction d'autocorrélation suivante :

$$C_{xx}(t) = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2] \cdot \cos(2\pi n F_0 t) \quad (3.23)$$

Nous pouvons effectivement conclure que la fonction d'autocorrélation conserve l'information fréquence, mais pas les informations phase et amplitude. Le signal d'autocorrélation possède toutes les fréquences comprises dans le signal initial et uniquement ces fréquences. Par contre la représentation de la fonction d'autocorrélation est d'autant plus distordue que le signal est riche en harmoniques étant donné que l'addition de ces signaux périodiques se fait sans cohérence de phase. Les distorsions

de certains signaux riches en harmonique seront mises en évidence dans le paragraphe suivant. Un exemple de cette distorsion est donné sur la figure 3.7.

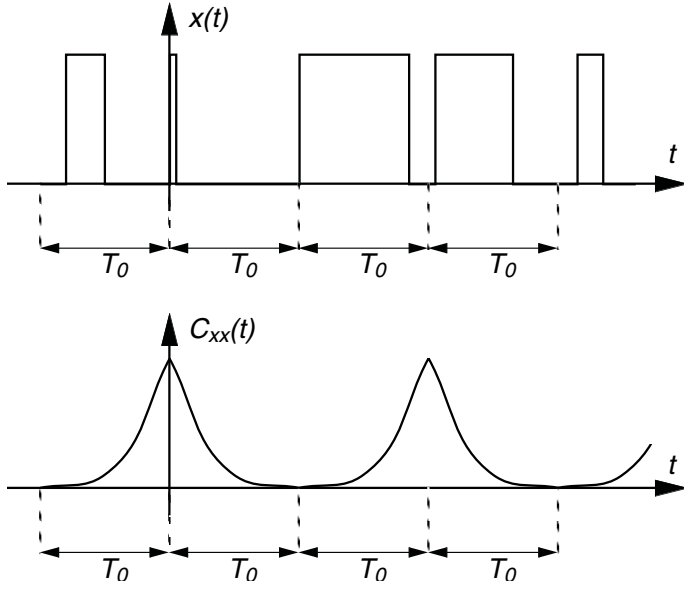


Figure 3.7. Fonction d'autocorrélation d'un signal formée d'impulsions de fréquence fondamentale $1/T_0$, mais irrégulièrement espacées.

Pour deux signaux périodiques réels $x(t)$ et $y(t)$, on définit la corrélation de la manière suivante :

$$C_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(\tau) \cdot y(\tau - t) \cdot d\tau \quad (3.24)$$

Ainsi si ces signaux sont périodiques de même période T_0 , ils peuvent s'exprimer sous la forme d'un développement en série de Fourier (relation 2.7) :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(nF_0) \cdot e^{j2\pi nF_0 t} \quad \text{et} \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} Y(nF_0) \cdot e^{j2\pi nF_0 t}$$

En appliquant la relation précédente de définition de la corrélation, nous obtenons la fonction d'intercorrélation suivante :

$$C_{xy}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(nF_0) \cdot \bar{Y}(nF_0) \cdot e^{j2\pi nF_0 t}$$

Mais si ces signaux sont périodiques de périodes différentes T_1 pour $x(t)$ et T_2 pour $y(t)$, ils peuvent s'exprimer sous la forme des développements en série de Fourier

suivants (relation 2.7) :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(nF_1) \cdot e^{j2\pi nF_1 t} \quad \text{et} \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} Y(nF_2) \cdot e^{j2\pi nF_2 t}$$

En considérant la fréquence F_3 comme le PPCM (plus petit commun multiple de F_1 et F_2), la fonction d'intercorrélation est alors la suivante :

$$C_{xy}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(n \cdot p \cdot F_1) \cdot \bar{Y}(n \cdot q \cdot F_2) \cdot e^{j2\pi nF_3 t} \quad \text{avec} \quad F_3 = p \cdot F_1 = q \cdot F_2$$

La fonction d'intercorrélation de deux signaux périodiques de périodes différentes est une fonction périodique dont la fréquence fondamental est le PPCM des fréquences des signaux considérés. Si le rapport des fréquences est irrationnel, alors la fonction d'intercorrélation est nulle.

3.4.3 Théorème de Parseval

Il paraît évident que l'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie : aussi elle sera la même qu'il s'agisse de la représentation temporelle ou fréquentielle. Les relations 3.14 et 3.17 permettent ainsi d'écrire :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \cdot df \quad (3.25)$$

Dans le cas de deux signaux, nous avons :

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \bar{y}(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot \bar{Y}(f) \cdot df$$

et

$$E_{yx} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot \bar{x}(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot \bar{X}(f) \cdot df$$

Ces relations expriment le théorème de Parseval.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 3.1 (Utilisation du théorème de Plancherel)

Nous avons effectué dans le chapitre 2 le calcul du spectre du signal formé d'une suite périodique d'impulsions. Ce calcul, réalisé à partir des relations de base, peut aussi être fait en utilisant d'une part des transformées de Fourier de fonctions connues et d'autre part le théorème de Plancherel.

Considérons connues les transformées de Fourier, précédemment calculées (chapitre 2) :

$$\Pi_{\tau}(t) \xleftrightarrow{F} \tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} = \tau \cdot \text{sinc}(\tau f)$$

et

$$\text{Pgn}_{T_0}(t) \xleftrightarrow{F} F_0 \cdot \text{Pgn}_{F_0}(f) = F_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(f - nF_0)$$

Solution

Le signal « suite périodique d'impulsions », représenté sur la figure 2.19, page 40, peut s'exprimer sous la forme d'un produit de convolution :

$$x(t) = A \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Pi_{\tau}(t - nT_0) = [A \cdot \Pi_{\tau}(t)] * \text{Pgn}_{T_0}(t)$$

Par conséquent, le spectre $X(f)$ du signal s'obtient en utilisant le théorème de Plancherel qui transforme le produit de convolution en produit simple en passant de l'espace des temps à l'espace des fréquences. Soit :

$$X(f) = A \cdot F\{\Pi_{\tau}(t)\} \cdot F\{\text{Pgn}_{T_0}(t)\} = A \cdot \tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot F_0 \cdot \text{Pgn}_{F_0}(f)$$

Ainsi nous retrouvons le résultat déjà établi précédemment :

$$S(f) = A\tau F_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\sin(\pi n F_0 \tau)}{\pi n F_0 \tau} \cdot \delta(f - nF_0)$$

ou

$$S(f) = A\tau F_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot \delta(f - nF_0)$$

Exercice 3.2 (Corrélation des signaux sinusoïdaux)

Calculer et comparer les fonctions d'autocorrélation des deux signaux sinusoïdaux de base :

$$s_1(t) = A \cdot \sin(2\pi F_0 t) \quad \text{et} \quad s_2(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t)$$

On suppose connus les spectres de ces deux signaux (relations 2.14 et 2.15) :

$$S_1(f) = \frac{j \cdot A}{2} [\delta(f + F_0) - \delta(f - F_0)]$$

et

$$S_2(f) = \frac{A}{2} [\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)]$$

Solution

Le calcul direct des fonctions d'autocorrélation de ces deux signaux en utilisant la relation 3.22 peut s'avérer relativement difficile. En revanche, connaissant les spectres de ces deux signaux, il est beaucoup plus simple d'utiliser la relation entre la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale :

$$C_{xx}(t) = F^{-1}\{S_{xx}(f)\} = F^{-1}\{|X(f)|^2\} = F^{-1}\{X(f) \cdot \bar{X}(f)\}$$

Ainsi, nous avons pour le signal $s_1(t)$:

$$S_{s_1 s_1}(f) = \frac{jA}{2} [\delta(f + F_0) - \delta(f - F_0)] \cdot \frac{jA}{2} [\delta(f + F_0) - \delta(f - F_0)]$$

En utilisant les propriétés de localisation du pic de Dirac (annexe 1), nous obtenons la résultat suivant :

$$S_{s_1 s_1}(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)]$$

La fonction d'autocorrélation de $s_1(t)$ est donc :

$$C_{s_1 s_1}(t) = F^{-1}\{S_{s_1 s_1}(f)\} = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(2\pi F_0 t)$$

Pour le signal $s_2(t)$, nous avons :

$$S_{s_2 s_2}(f) = \frac{A}{2} [\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)] \cdot \frac{A}{2} [\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)]$$

En utilisant les propriétés de localisation du pic de Dirac (annexe 1), nous obtenons la même résultat que précédemment :

$$S_{s_2 s_2}(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)]$$

La fonction d'autocorrélation de $s_2(t)$ est donc :

$$C_{s_2 s_2}(t) = F^{-1}\{S_{s_2 s_2}(f)\} = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(2\pi F_0 t) = C_{s_1 s_1}(t)$$

Nous pouvons ainsi noter que les deux fonctions d'autocorrélation de ces signaux sont identiques. En effet la fonction d'autocorrélation ne conservant pas l'information phase, il est naturelle que nous perdions cette différenciation. De la même manière l'amplitude n'est pas conservée.

Chapitre 4

Filtrage des signaux analogiques

4.1 TRANSFORMÉE DE LAPLACE

4.1.1 Définition

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la transformée de Fourier du signal non périodique $s(t)$ s'écrit sous la forme (équation 2.20) :

$$F\{s(t)\} = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt \quad (4.1)$$

$S(f)$ n'existe que si cette intégrale a une valeur finie (convergente). Dans le cas contraire on peut rendre cette intégrale convergente en multipliant $s(t)$ par $e^{-\sigma t}$, la valeur σ est réelle positive et est appelée « rayon de convergence ». Cela conduit à définir une nouvelle grandeur, appelée « fréquence complexe », p :

$$p = \sigma + j2\pi f \quad (4.2)$$

Si de plus on considère un signal causal (nul pour $t < 0$), on obtient la transformée de Laplace, notée « L », :

$$L\{s(t)\} = S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \quad (4.3)$$

La transformée de Laplace est très utile dans l'étude des régimes transitoires qui vérifient le principe de causalité. En particulier, elle sera un outil important dans l'étude des filtres basée sur la réponse impulsionnelle (signal causal). D'une manière générale, cette transformée est l'outil de base dans le domaine de l'automatique, c'est-à-dire des systèmes bouclés. Le seul but de cette présentation est de rapprocher les deux principaux outils utilisés dans le cadre des signaux continus.

Dans le cas d'un régime harmonique établi, on peut remplacer p par $j2\pi f$ ou $j\omega$ dans la transformée de Laplace.

Un ensemble de transformées de Laplace est donné en annexe D.

4.1.2 Transformée de Fourier et transformée de Laplace

Si on a une fonction $s(t)$ telle que $s(t) = 0$ pour $t < 0$, alors on a la relation :

$$F\{s(t)\} = L\{s(t)\}_{p=j2\pi f}$$

4.1.3 Propriétés de la transformée de Laplace

On retrouve les mêmes propriétés pour la transformation de Laplace que pour la transformation de Fourier. Soit la fonction $x(t)$ et la transformée de Laplace $X(p)$ de ce signal, nous écrivons :

$$x(t) \xleftrightarrow{L} L\{x(t)\} = X(p)$$

Les principales propriétés de la transformée de Laplace, similaires à celles de la transformée de Fourier, sont :

a) *Linéarité*

$$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \xleftrightarrow{L} a \cdot X(p) + b \cdot Y(p)$$

avec a et b des constantes.

b) *Homothétie (figure 2.7, page 28)*

$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{p}{a}\right) \quad \text{avec } a \in \Re$$

c) *Translation*

$$x(t - a) \xleftrightarrow{L} X(p) \cdot e^{-ap} \quad \text{avec } a \in \Re$$

et

$$x(t) \cdot e^{bp} \xleftrightarrow{L} X(p - b) \quad \text{avec } b \in \Re$$

d) *Dérivation*

$$(-1)^n \cdot t^n \cdot x(t) \xleftrightarrow{L} \frac{d^n(X(p))}{dp^n}$$

et

$$\frac{d^n(x(t))}{dt^n} \xleftrightarrow{L} p^n \cdot X(p) - \left[p^{n-1} \cdot x(0) + \sum_{i=2}^n p^{n-i} \cdot \left(\frac{d^{i-1}(x(t))}{dt^{i-1}} \right)_{t=0^+} \right]$$

pour $n = 1$:

$$\frac{d(x(t))}{dt} \xleftrightarrow{L} p \cdot X(p) - x(0)$$

e) *Intégration*

$$\int_0^t x(\tau) \cdot d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{p} \cdot X(p)$$

et

$$\frac{1}{t} \cdot x(t) \xleftrightarrow{L} \int_p^{+\infty} X(\zeta) \cdot d\zeta$$

f) *Transformée d'une fonction périodique*

Soit $x(t)$ une fonction périodique de période T_0 , nous avons :

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT_0}} \cdot \int_0^{T_0} e^{-pt} \cdot x(t) \cdot dt$$

g) *Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale*

Le théorème de la valeur initiale donne la valeur du signal à l'instant 0 en fonction de sa transformée de Laplace :

$$x(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \{p \cdot X(p)\}$$

Le théorème de la valeur finale donne la valeur du signal à l'infini en fonction de sa transformée de Laplace :

$$x(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \{p \cdot X(p)\}$$

h) *Convolution et transformée de Laplace*

Nous avons la même relation que pour la transformée de Fourier (paragraphe 3.3.4), soit :

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{L} X(p) \cdot Y(p) \quad (4.4)$$

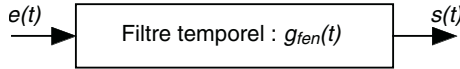
et

$$x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{L} X(p) * Y(p) \quad (4.5)$$

4.2 FILTRAGE OU FENÊTRAGE TEMPOREL

4.2.1 Principes généraux

Le terme de « filtrage » est habituellement utilisé dans le domaine fréquentiel. Aussi dans le domaine temporel, nous parlerons plus de *fenêtrage*, que de filtrage temporel, qui peut être défini comme l'opération consistant à prélever, interrompre ou seulement atténuer un signal :



Ainsi, le signal de sortie $s(t)$ est le produit du signal d'entrée $e(t)$ et de la fonction temporelle du filtre ou de la fenêtre $g_{\text{fen}}(t)$:

$$s(t) = g_{\text{fen}}(t) \cdot e(t)$$

La modification qu'entraîne ce fenêtrage ou filtrage temporel au niveau du spectre en fréquence de $e(t)$ est donnée en appliquant le théorème de Plancherel (paragraphe 3.3.4) :

$$s(t) = g_{\text{fen}}(t) \cdot e(t) \xleftrightarrow{\text{F}} S(f) = G_{\text{fen}}(f) * E(f)$$

Par conséquent, pour un filtre de fonction temporelle $g_{\text{fen}}(t)$ quelconque, le spectre du signal de sortie sera différent de celui du signal d'entrée à cause du produit de convolution (figure 4.1, page ci-contre). Ainsi les actions temporelles telles que le prélèvement d'un signal $g_{\text{fen},1}(t)$ (cas de toutes mesures réalisées pendant un temps fini) ou l'interruption $g_{\text{fen},2}(t)$ (interrupteur monté sur le circuit d'un haut-parleur) ou encore l'atténuation $g_{\text{fen},3}(t)$ (atténuation réalisée pendant un temps fini à l'aide d'un potentiomètre réglant le volume du son) sont des filtres temporels qui vont modifier le spectre du signal.

Dans le premier cas $g_{\text{fen},1}(t)$ (découpage d'une tranche temporelle d'un signal), si la durée T , dite durée de la mesure, tend vers l'infini, alors $g_{\text{fen},1}(t) = 1$ pour tout t , or :

$$g_{\text{fen}}(t) = 1 \xleftrightarrow{\text{F}} G_{\text{fen}}(f) = \delta(f)$$

donc

$$s(t) = g_{\text{fen}}(t) \cdot e(t) = e(t)$$

et

$$S(f) = G_{\text{fen}}(f) * E(f) = \delta(f) * E(f) = E(f)$$

Nous n'obtenons ainsi aucune modification du signal.

4.2.2 Le fenêtrage temporel

L'enregistrement par un appareil ou le traitement par ordinateur d'un signal impose un temps fini au signal qu'il soit analogique ou échantillonné. Ce problème de la durée finie d'un signal est celui de la mesure.

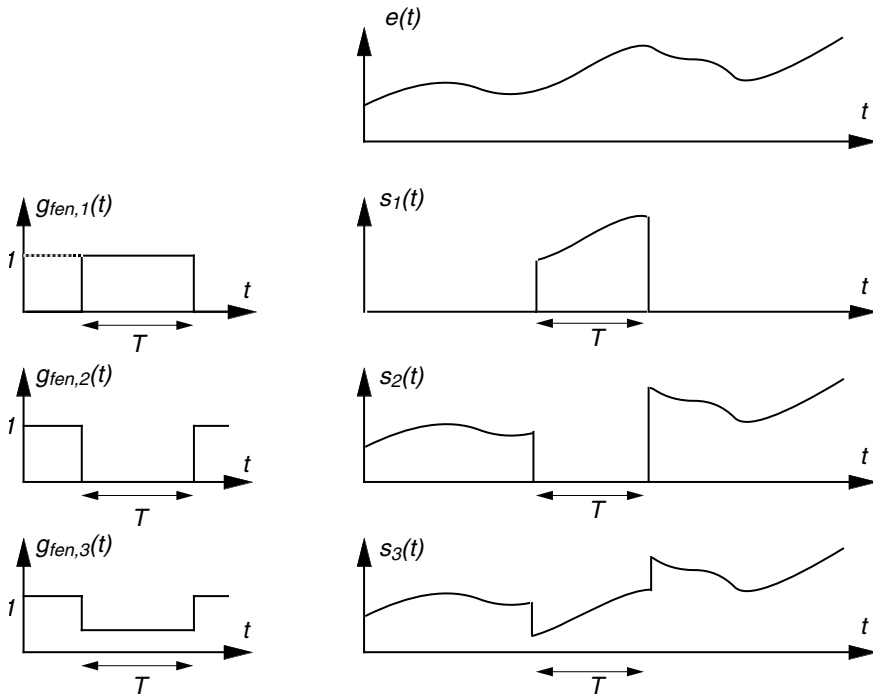


Figure 4.1. Filtrage ou fenêtrage temporel.

Pour réaliser une formulation de cette troncature temporelle du signal, on utilise la fonction « porte » temporelle $\Pi_\tau(t)$ de largeur τ . Comme nous l'avons vu au chapitre 2 la transformée de Fourier de cette fonction « porte » est la fonction sinus cardinal $\text{sinc}(\tau f)$ (figure 4.2). Ainsi, les relations de modifications du signal dues à la mesure sur une durée finie τ sont :

$$s(t) = \Pi_\tau(t) \cdot e(t) \quad \text{et} \quad S(f) = \left[\tau \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right] * E(f) \quad (4.6)$$

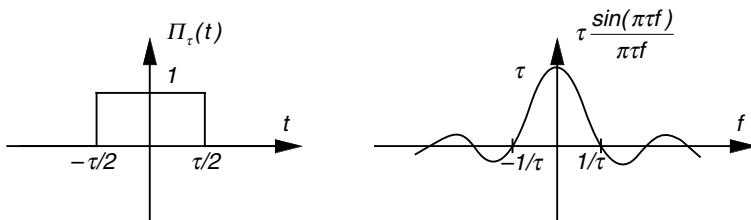


Figure 4.2. Transformée de Fourier de la fonction « porte » ou rectangle.

L'influence de cette fenêtre temporelle sur le signal et sur son spectre peut être très importante. Plus l'observation ou la mesure du signal sera longue et plus le spectre du signal sera précis, c'est-à-dire peu perturbé par cette fenêtre temporelle physiquement inévitable.

Prenons l'exemple d'un signal cosinusoidal pur de période T_0 . Le spectre de ce signal est représenté par deux pics de Dirac situés aux fréquences F_0 et $-F_0$. Soit :

$$s(t) = \cos(2\pi F_0 t) \quad \text{et} \quad S(f) = \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)]$$

En utilisant les relations précédentes, on obtient le signal mesuré $s(t)$ (c'est-à-dire $e(t)$ tronqué et limité à τ) :

$$s(t) = \cos(2\pi F_0 t) \cdot \Pi_\tau(t)$$

ou

$$s(t) = \cos(2\pi F_0 t) \quad \text{pour } t \in [-\tau/2, \tau/2] \quad \text{et} \quad s(t) = 0 \quad \text{pour } t \notin [-\tau/2, \tau/2]$$

et son spectre $S(f)$:

$$S(f) = \left[\tau \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right] * \left[\frac{1}{2} \cdot [\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)] \right]$$

soit

$$S(f) = \frac{\tau}{2} \cdot \left[\frac{\sin(\pi \tau (f + F_0))}{\pi \tau (f + F_0)} + \frac{\sin(\pi \tau (f - F_0))}{\pi \tau (f - F_0)} \right]$$

Nous obtenons ainsi un spectre formé de deux fonctions de type sinc centrées sur les fréquences F_0 et $-F_0$ (figures 4.3 et 4.4, page ci-contre).

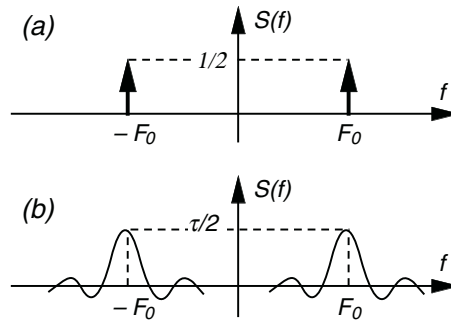


Figure 4.3. Modification du spectre en fréquence d'un signal sinusoïdal par une troncature temporelle : (a) spectre du signal théorique infini et (b) spectre du signal tronqué temporellement.

Dans le cas général d'un signal périodique quelconque avec un spectre formé d'un ensemble de raies de diverses importances, le fenêtrage temporel, c'est-à-dire la mesure d'un tel signal, conduit à un spectre formé de la somme de toutes les fonctions sinc placées au niveau des fréquences existantes avec une amplitude proportionnelle à l'importance de la raie. Ce résultat peut conduire à une interprétation erronée du spectre : distinction impossible de deux fréquences proches, localisation d'une fréquence sans existence réelle, etc.

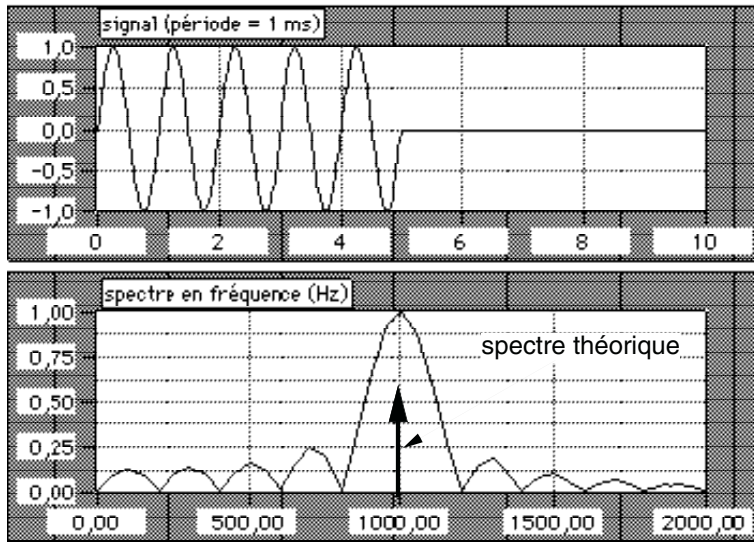


Figure 4.4. Modification du spectre d'un signal sinusoïdal tronqué : exemple d'un signal limité à 5 périodes, le spectre obtenu correspond à la valeur absolue du spectre calculé.

Remarque : il est donc important de constater que le spectre d'un signal tronqué temporellement, c'est-à-dire mesuré sur un temps fini (cas réel), va être modifié dans le sens où chaque composante du spectre sera transformée en une forme $\text{sinc}(x)$. Ce résultat correspond au principe d'incertitude : une connaissance complète du signal sur l'axe des temps conduit à une détermination précise dans le domaine fréquentiel alors qu'une connaissance limitée temporellement du signal induit un « flou » sur la détermination du spectre de ce signal. Une étude complète de cet effet de fenêtrage temporel et des moyens de le limiter est faite dans le chapitre 8.

Exemple. Considérons l'exemple déjà étudié d'un laser impulsif femtoseconde ($\tau = 10$ fs) (paragraphe 2.2.3). La longueur d'onde étant dans l'infrarouge proche ($\lambda = 1 \mu\text{m}$), la période d'oscillation T de cette onde électromagnétique est :

$$T = \frac{\lambda}{c} = 0,33 \times 10^{-14} \text{ s}$$

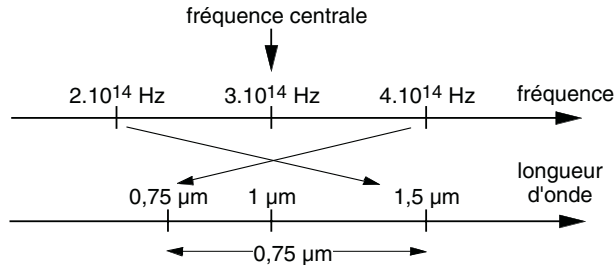
ou

$$F = 3 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Pendant la durée de l'impulsion, il y aura donc 3 périodes d'oscillations. On peut évaluer la largeur du lobe central du spectre en fréquence et la variation de la longueur d'onde correspondante :

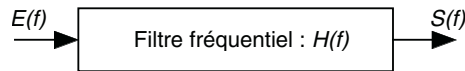
$$\Delta F = \frac{1}{\tau} = 10^{14} \text{ Hz}$$

Ainsi, comme nous l'avons vu, un laser femtoseconde n'est pas monochromatique ($\Delta\lambda = 0,75 \mu\text{m}$).



4.3 FILTRAGE FRÉQUENTIEL

Les termes de filtre ou de filtrage s'appliquent en général plus à des systèmes définis par un produit dans l'espace des fréquences. De la même manière que dans le domaine temporel, nous parlerons de filtrage fréquentiel comme l'opération consistant à prélever, interrompre ou seulement atténuer tout ou partie des composantes fréquentielles d'un signal :



Ainsi, le spectre $S(f)$ du signal de sortie $s(t)$ est le produit du spectre $E(f)$ signal d'entrée $e(t)$ et de la fonction fréquentielle du filtre $H(f)$.

4.3.1 Théorème fondamental des filtres

Le théorème fondamental des filtres s'appuie sur la définition même des filtres comme systèmes de convolution (paragraphe 3.3.1). Le filtre est défini par sa réponse impulsionnelle, notée $h(t)$, et par sa fonction de transfert, notée $H(f)$ ou $H(p)$ réciproquement transformée de Fourier ou de Laplace de $h(t)$. La réponse $s(t)$ d'un tel filtre à un signal d'entrée $e(t)$ est donnée par les opérations suivantes :

$$S(f) = H(f) \cdot E(f) \quad (4.7)$$

et

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \quad (4.8)$$

Dans la pratique, un filtre sera souvent caractérisé par sa réponse indicielle, c'est-à-dire sa réponse à un échelon unité $u(t)$, signal déjà étudié au paragraphe 2.2.4. Soit :

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \quad (4.9)$$

La relation de base 4.8 peut prendre différentes formes suivant les caractéristiques de $e(t)$ et $h(t)$:

- $e(t)$ et $h(t)$ quelconques :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e(t - \tau) \cdot d\tau$$

- $h(t)$ causal (filtre réalisable : paragraphe suivant) :

$$s(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

- $e(t)$ causal (exemple du signal $u(t)$ « échelon unité ») :

$$s(t) = \int_0^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

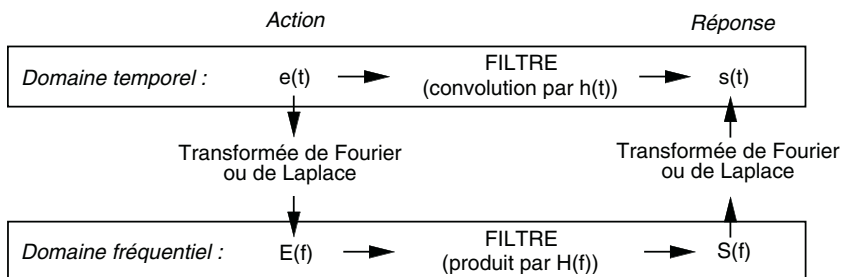
- $e(t)$ et $h(t)$ causaux :

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

À partir de ces relations, il est possible de déterminer la réponse à une action ou signal d'entrée quelconque.

Mais il peut être très intéressant de passer dans le domaine fréquentiel pour déterminer la réponse, car l'opération à réaliser est alors un produit simple. Le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel pour le signal d'entrée se fait par transformée de Fourier ou de Laplace, de même le retour dans le domaine temporel pour le signal de sortie se fait par les transformations inverses (le calcul de ces transformées se faisant à partir des tables des fonctions usuelles, des propriétés et des règles opératoires de base).

Soit le chemin de calcul suivant :



Une des applications les plus importantes de ce processus est le calcul de la réponse de filtres en chaîne. Si n filtres, caractérisés par leur réponse impulsionnelle $h_i(t)$ et leur fonction de transfert $H_i(f)$ ou $H_i(p)$, sont mis en série, on peut les remplacer par un filtre équivalent dont la réponse impulsionnelle peut être calculée par :

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_i(t) * \dots * h_n(t)$$

Ce calcul est relativement difficile à effectuer. Par contre le calcul de la fonction de transfert équivalente sera très simple :

$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f) \cdot \dots \cdot H_i(f) \cdot \dots \cdot H_n(f) = \prod_{l=1}^n H_l(f)$$

Il est toutefois très important de noter que ce calcul n'est possible que si la mise en chaîne des filtres ne modifie pas leurs caractéristiques, c'est-à-dire si l'impédance de sortie du filtre est très petite par rapport à l'impédance d'entrée du filtre suivant. Cette condition sera remplie en particulier dans le cas des filtres numériques (chapitre 9).

4.3.2 Filtres réalisables

Un filtre est réalisable si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est nulle pour $t < 0$: car l'effet ne peut précéder la cause. Tout système physique aura donc une réponse impulsionnelle $h(t)$ réelle quelconque (ni paire, ni impaire), par conséquent, la fonction de transfert $H(f)$ sera obligatoirement complexe :

$$H(f) = |H(f)| \cdot e^{-j \cdot \varphi(f)}$$

Le spectre $S(f)$ de la réponse $s(t)$ du filtre à un signal $e(t)$, ayant pour transformée de Fourier $E(f)$, montre que *tout filtre physique réalisable déphase* :

$$S(f) = E(f) \cdot H(f) = E(f) \cdot |H(f)| \cdot e^{-j \cdot \varphi(f)}$$

Exemple. il est intéressant d'étudier le cas d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure F_c . Le spectre de ce filtre peut être modélisé par la fonction « porte », étudiée précédemment (paragraphe 2.2.4), soit :

$$H(f) = \Pi_{2F_c}(f)$$

La réponse impulsionnelle de ce filtre est la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert, soit :

$$h(t) = \frac{\sin(\pi 2F_c t)}{\pi t}$$

On constate que la réponse impulsionnelle $h(t)$, ainsi obtenue, n'est pas causale. Par conséquent, nous pouvons en déduire qu'un filtre passe-bas idéal n'est pas réalisable.

Dans le cas des filtres réalisables, il est possible de calculer plus complètement la réponse indicielle suivant l'équation 4.9. Le filtre étant réalisable, sa réponse impulsionnelle $h(t)$ peut se mettre sous la forme causale :

$$h(t) = h_0(t) \cdot u(t)$$

avec $h_0(t)$ une fonction quelconque

Ainsi, nous obtenons la réponse indicielle $s_{\text{ind}}(t)$ d'un filtre réalisable :

$$s_{\text{ind}}(t) = h(t) * u(t) = [h_0(t) \cdot u(t)] * u(t) = \int_0^t h_0(\tau) \cdot d\tau \quad (4.10)$$

Les filtres analogiques continus réalisables sont construits à partir des composants électroniques : résistances, capacités, self-inductances et amplificateurs opérationnels. Le fonctionnement de ces filtres est caractérisé par des équations intégrodifférentielles linéaires à coefficients constants entre le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$. En utilisant la transformée de Laplace, cette relation donne une fonction de transfert $H(p)$ qui est le quotient de deux polynômes :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i \cdot p^i}{\sum_{j=0}^n a_j \cdot p^j} \quad (4.11)$$

Cette relation 4.11 peut s'exprimer sous la forme d'une somme ou d'un produit des quatre fonctions élémentaires suivantes :

- filtre passe-bas du premier ordre (paragraphe suivant) :

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p} \quad (4.12)$$

avec τ le temps de réponse.

- filtre passe-haut du premier ordre (paragraphe suivant) :

$$H_2(p) = \frac{\tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \quad (4.13)$$

avec τ le temps de réponse.

- filtre passe-bas du deuxième ordre :

$$H_3(p) = \frac{1}{1 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot p + (\tau \cdot p)^2} \quad (4.14)$$

avec τ le temps de réponse et ξ le coefficient d'amortissement.

- filtre passe-bas du deuxième ordre :

$$H_4(p) = \frac{(\tau \cdot p)^2}{1 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot p + (\tau \cdot p)^2} \quad (4.15)$$

avec τ le temps de réponse et ξ le coefficient d'amortissement.

4.3.3 Les différents types de filtres

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié les filtres en terme de fonction de transfert, ce qui nous a amenés à décliner les quatre types d'équations 4.12 à 4.15. Mais en se plaçant au niveau de l'utilisation du filtre fréquentiel (élimination de certaines fréquences), il est plus logique de considérer les quatre types de filtres qui peuvent être utilisés : filtre passe-bas, filtre passe-haut, filtre passe-bande et filtre coupe-bande ou réjecteur. Les courbes de gain ou gabarits de ces filtres sont présentés sur la figure 4.5.

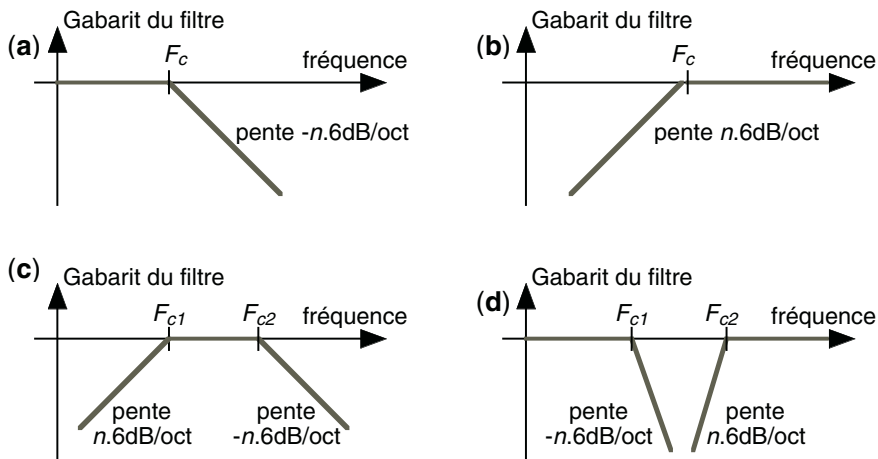


Figure 4.5. Les quatre types de filtres réalisables avec leurs paramètres : filtre passe-bas (a), filtre passe-haut (b), filtre passe-bande (c) et filtre réjecteur (d).

En plus des fréquences de coupure F_c haute (et/ou basse), les paramètres essentiels qui caractérisent ces différents filtres sont :

- pente des transitions : plus cette pente est forte, meilleur est le filtre, car les fréquences à éliminer (*i.e.*, fréquences supérieures à la fréquence de coupure pour un filtre passe-bas) sont alors fortement et rapidement atténuées ;
- ondulation de la bande passante : plus cette ondulation est faible, meilleur est le filtre, car les fréquences à conserver (*i.e.*, fréquences inférieures à la fréquence de coupure pour un filtre passe-bas) sont alors peut altérer.

La réalisation des filtres de type passe-bande et coupe-bande (ou réjecteur) se fait à partir de l'association des fonctions de transfert de base des filtres passe-bas et passe-haut. Ainsi considérons les deux fonctions de transfert de base données par les équations 4.12 et 4.13 :

- filtre passe-bas de fréquence de coupure F_c :

$$H_{\text{passe-bas}}(f) = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{F_c}}$$

- filtre passe-haut de fréquence de coupure F_c :

$$H_{\text{passe-haut}}(f) = \frac{j \cdot \frac{f}{F_c}}{1 + j \cdot \frac{f}{F_c}}$$

Les fonctions de transfert des filtres passe-bande et coupe-bande s'expriment par l'association (produit de fonctions de transferts précédentes) :

- filtre passe-bande entre les fréquences F_{c1} et F_{c2} :

$$H_{\text{passe-bande}}(f) = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{F_{c1}}} \cdot \frac{j \cdot \frac{f}{F_{c2}}}{1 + j \cdot \frac{f}{F_{c2}}} \quad \text{avec } F_{c1} > F_{c2}$$

- filtre coupe-bande ou réjecteur entre les fréquences F_{c1} et F_{c2} :

$$H_{\text{coupe-bande}}(f) = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{F_{c1}}} \cdot \frac{j \cdot \frac{f}{F_{c2}}}{1 + j \cdot \frac{f}{F_{c2}}} \quad \text{avec } F_{c1} < F_{c2}$$

Différentes fonctions de transfert peuvent être proposées pour répondre au mieux d'une part au type de filtre demandé et d'autre part aux deux caractéristiques de base (pente et ondulation) qui sont souvent l'objet d'un compromis. Ainsi nous pouvons citer les deux types de filtres les plus connus :

- *filtre Butterworth*. Ces filtres sont basés sur une courbe de gain de la forme suivante :

$$|G(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (f/F_c)^{2n}}}$$

avec F_c la fréquence de coupure et n l'ordre du filtre.

Ces filtres ont l'avantage d'avoir une ondulation résiduelle très faible. En revanche la pente d'atténuation reste fonction du paramètre n , comme pour des filtres classiques $n \cdot 6$ dB/oct. Pour une valeur de $n = 1$, nous retrouvons le filtre passe-bas classique détaillé dans le paragraphe suivant.

Des exemples d'utilisation de filtres passe-bas, passe-haut et coupe bande sur la base des filtres de Butterworth sont présentés sur les figures 4.6 et 4.7, page suivante et 4.8, page 77.

- *filtre Tchebychev*. Ces filtres sont basés sur une courbe de gain de la forme suivante :

$$|G(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + [G_n(f)]^{2n}}}$$

Les fonctions indicées $G_n(f)$, appelées polynôme de Tchebychev, se calculent par récurrence à partir de l'équation suivante :

$$G_{n+2}(f) = f \cdot G_{n+1}(f) - G_n(f) \quad \text{avec } G_0(f) = 1 \quad \text{et } G_1(f) = \frac{f}{F_c}$$

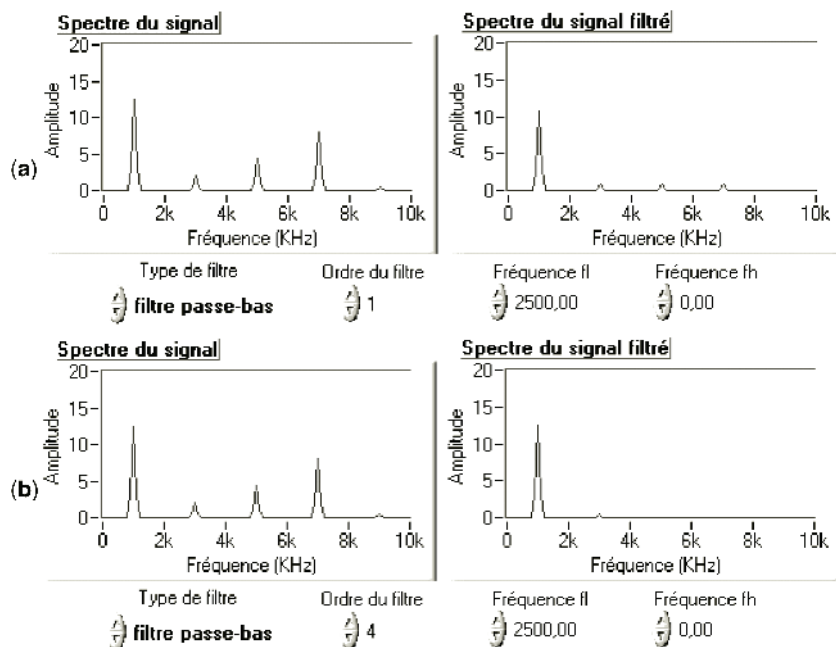


Figure 4.6. Comparaison des effets d'un traitement par filtre passe-bas de fréquence de coupure égale à 2,5 kHz de type Butterworth : filtre d'ordre 1 (a), filtre d'ordre 4 (b).

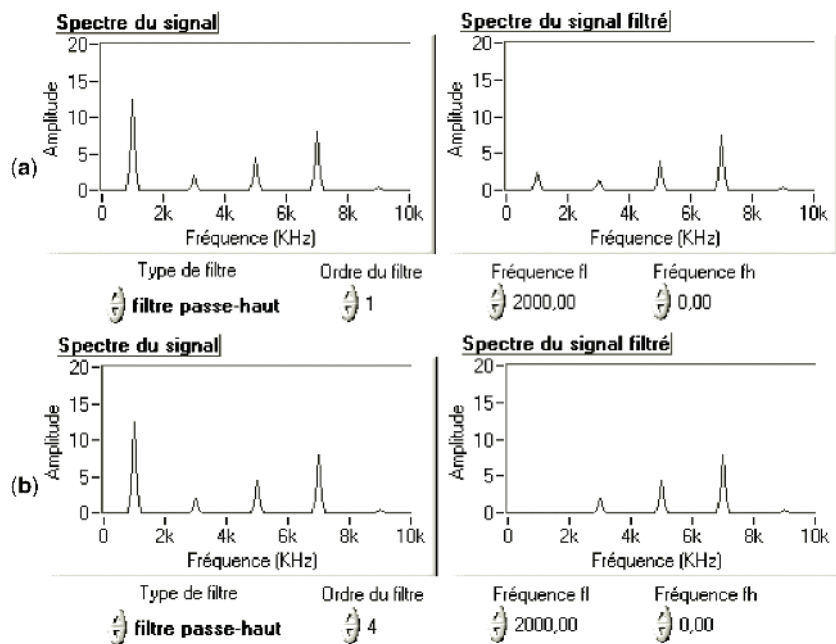


Figure 4.7. Comparaison des effets d'un traitement par filtre passe-haut de coupure égale à 2 kHz de type Butterworth : filtre d'ordre 1 (a), filtre d'ordre 4 (b).

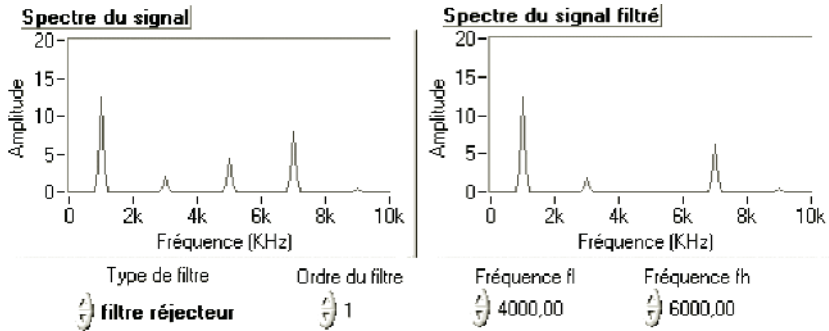


Figure 4.8. Comparaison des effets d'un traitement par filtre coupe-bande de type Butterworth : filtre d'ordre 1 et atténuation des fréquences comprises entre 4 kHz et 6 kHz.

Ces filtres présentent l'inconvénient d'avoir une ondulation résiduelle faible et constante, mais en revanche, ils possèdent une pente d'atténuation très forte liée au paramètre n , appelé ordre du filtre.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 4.1 (Filtre passe-bas du premier ordre)

Nous allons considérer un filtre passe-bas du premier ordre qui peut être réalisé à partir du montage électronique représenté sur la figure 4.9. Pour ce filtre, établir l'équation différentielle et en déduire la fonction de transfert. Représenter cette fonction de transfert sous la forme d'une courbe de gain et de phase.

Calculer la réponse impulsionnelle en utilisant la transformée de Fourier inverse. À partir de ces résultats, calculer la réponse indicielle de ce filtre passe-bas.

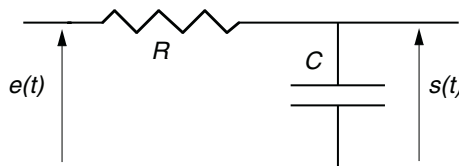


Figure 4.9. Circuit électronique réalisant un filtre passe-bas du premier ordre.

En considérant un signal constitué d'une rampe limitée au temps t_0 et ensuite constant en amplitude (égale à 1), calculer la réponse du filtre passe-bas à ce signal.

Solution

La réponse du filtre passe-bas du premier ordre se calcule à partir de l'équation différentielle suivante :

$$e(t) = R \cdot C \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

avec $\tau = RC$ la constante de temps du filtre.

La fonction de transfert $H(f)$ ou $H(p)$ est le rapport des tensions de sortie et d'entrée à vide (sortie ouverte) en régime harmonique établi :

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi\tau f} \quad (4.16)$$

ou

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \quad \text{avec le pôle } p = 1/\tau \quad (4.17)$$

L'étude d'un filtre se fait généralement en décrivant l'évolution du module et de la phase de la fonction de transfert en fonction de la fréquence. Représentant le rapport du signal de sortie $s(t)$ au signal d'entrée $e(t)$, le module de la fonction de transfert, appelé gain du filtre G_{dB} , est donné en dB suivant la convention de la relation 3.3. Dans le cas du filtre passe-bas du premier ordre, nous avons les deux expressions suivantes :

$$G_{dB} = -10 \log_{10} (1 + (2\pi\tau f)^2) \quad (4.18)$$

et

$$\varphi = -\text{Arctan}(2\pi\tau f) \quad (4.19)$$

À partir de l'expression du module de la fonction de transfert, on trace la courbe de gain du filtre qui est appelée aussi diagramme de Bode (figure 4.10). Dans ce plan de Bode (G_{dB} , $\log(f)$), on peut représenter soit la courbe réelle, soit seulement les droites asymptotiques à cette courbe. La fréquence particulière ($F_c = 1/2\pi RC$) est appelée fréquence de coupure du filtre et, pour cette valeur, le gain vaut -3 dB. À partir de l'expression de la phase, on obtient la courbe de phase du filtre. La phase étant négative pour toutes les valeurs de la fréquence, le filtre sera dit à retard de phase : le signal de sortie est en retard par rapport au signal d'entrée (figure 4.11, page ci-contre).

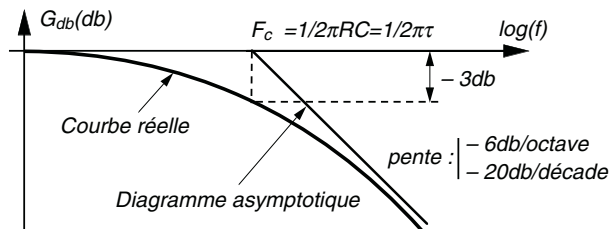


Figure 4.10. Courbe de gain ou diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre.

À partir de l'expression de $H(f)$, la transformée de Fourier inverse permet d'obtenir la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre en utilisant la transformée suivante (annexe C) :

$$s(t) = A \cdot u(t) \cdot e^{-a \cdot t} \xleftrightarrow{F} S(f) = \frac{A}{a + j2\pi f}$$

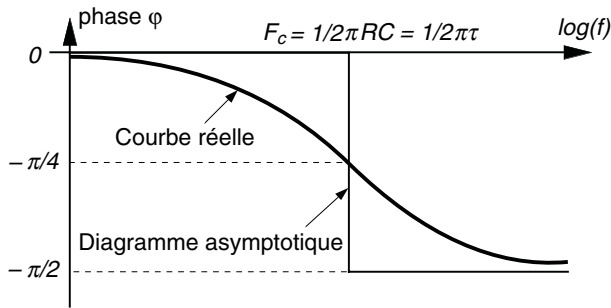


Figure 4.11. Courbe de phase d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre.

Soit le résultat suivant présenté sur la figure 4.12 :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \cdot u(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4.20)$$

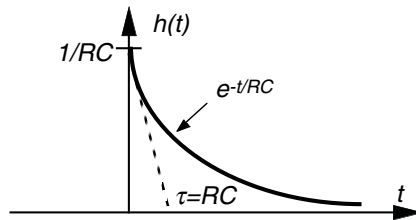


Figure 4.12. Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre.

À partir de l'expression de $h(t)$ et de la relation générale 4.10 donnant la réponse indicielle d'un filtre, nous avons la réponse indicielle d'un filtre passe-bas du premier ordre (figure 4.13) :

$$s_{\text{ind}}(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^t u(\theta) \cdot e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} \cdot d\theta = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot u(t) \quad (4.21)$$

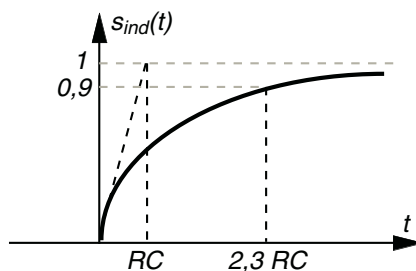


Figure 4.13. Réponse indicielle d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre.

À partir de la relation 3.10 représentant l'opération de convolution réalisée par le filtre et l'expression de $h(t)$, la réponse du filtre passe-bas du premier ordre à un signal causal

quelconque $e(t)$ peut être mise sous la forme suivante :

$$s(t) = \frac{1}{\tau} \cdot u(t) \cdot \int_0^t e^{-\frac{\theta}{\tau}} \cdot e(t - \theta) \cdot d\theta$$

ou

$$s(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t) \cdot \int_0^t e^{+\frac{\theta}{\tau}} \cdot e(\theta) \cdot d\theta$$

Cette dernière expression permet par exemple de calculer simplement la réponse d'un filtre à une entrée de type rampe limitée en temps (figure 4.14). L'expression de cette entrée causale est :

$$e(t) = t/t_0 \text{ pour } t \in [0, t_0] \quad \text{et} \quad e(t) = 1 \text{ pour } t \in [t_0, +\infty)$$

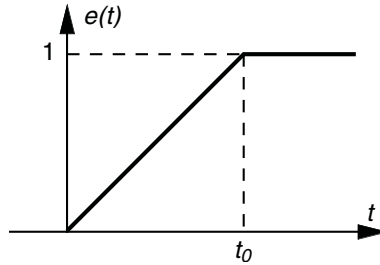


Figure 4.14. Signal d'entrée de type rampe limitée en temps.

Le signal de sortie va donc être le résultat du calcul suivant :

$$s(t) = \frac{1}{\tau} \cdot u(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left[\int_0^{t_0} e^{+\frac{\theta}{\tau}} \cdot \frac{\theta}{t_0} \cdot d\theta + \int_{t_0}^{+\infty} e^{+\frac{\theta}{\tau}} \cdot d\theta \right]$$

La résolution de cette équation va conduire à une solution pour le signal de sortie $s(t)$ en deux parties suivant la valeur de t :

– pour $t \in [0, t_0]$:

$$s(t) = \frac{1}{t_0} \cdot u(t) \cdot \left[t - \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right]$$

– pour $t \in [t_0, +\infty)$:

$$s(t) = u(t) \cdot \left[1 - \frac{\tau}{t_0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\tau}} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

Ces deux courbes se raccordent au point $t = t_0$. Cette sollicitation du type rampe est utilisée dans le domaine de l'automatique où elle correspond à la commande progressive d'un actionneur pour arriver à la valeur de consigne, cet actionneur étant modélisé par un opérateur retard. On vérifie en particulier le retard de $\tau = RC$ de la sortie sur l'entrée. Suivant les valeurs respectives de t et t_0 , le signal de sortie a des représentations différentes ; la figure 4.15, page ci-contre correspond à un cas intermédiaire avec une valeur du rapport t/t_0 inférieur à 1.

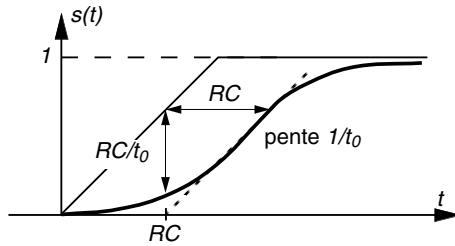


Figure 4.15. Réponse d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre à un signal de type rampe limitée en temps.

Exercice 4.2 (Filtre passe-haut du premier ordre)

Nous allons considérer un filtre passe-haut du premier ordre qui peut être réalisé à partir du montage électronique représenté sur la figure 4.16.

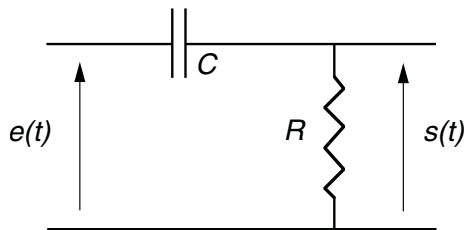


Figure 4.16. Filtre passe-haut du premier ordre.

Pour ce filtre, établir l'équation différentielle et en déduire la fonction de transfert. Représenter cette fonction de transfert sous la forme d'une courbe de gain et de phase.

Calculer la réponse impulsionnelle en utilisant la transformée de Fourier inverse. À partir de ces résultats, calculer la réponse indicielle de ce filtre passe-haut. Considérons un signal constitué d'une rampe. Calculer la réponse du filtre passe-haut à ce signal.

Solution

La réponse du filtre passe-haut du premier ordre se calcule à partir de l'équation différentielle suivante :

$$R \cdot C \cdot \frac{de(t)}{dt} = R \cdot C \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

avec $\tau = RC$ la constante de temps du filtre.

La fonction de transfert $H(f)$ ou $H(p)$ est le rapport des tensions de sortie et d'entrée à vide (sortie ouverte) en régime harmonique établi :

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = \frac{j2\pi\tau f}{1 + j2\pi\tau f} \quad (4.22)$$

et

$$H(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p}$$

avec le pôle $p = 1/\tau$ et le zéro $p = 0$.

Dans le cas du filtre passe-haut du premier ordre, nous avons les deux expressions du gain du filtre et de la phase suivante :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left(2\pi \tau f / \sqrt{1 + (2\pi \tau f)^2} \right) \quad (4.23)$$

et

$$\varphi = \text{Arctan} (1/2\pi \tau f) \quad (4.24)$$

À partir de l'expression du module de la fonction de transfert, on trace la courbe de gain du filtre, diagramme de Bode (figure 4.17). La fréquence particulière ($F_c = 1/2\pi RC$) est appelée fréquence de coupure du filtre et, pour cette valeur, le gain vaut -3 dB. À partir de l'expression de la phase, on obtient la courbe de phase du filtre. La phase étant positive pour toutes les valeurs de la fréquence, le filtre sera dit à avance de phase : le signal de sortie est en avance par rapport au signal d'entrée (figure 4.18).

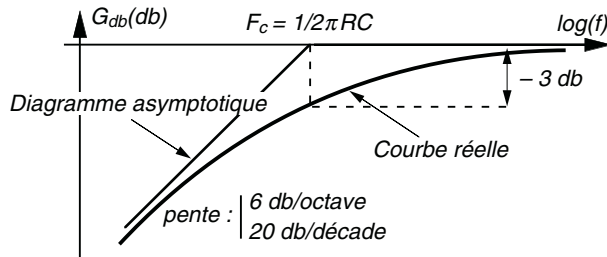


Figure 4.17. Courbe de gain ou diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du 1^{er} ordre.

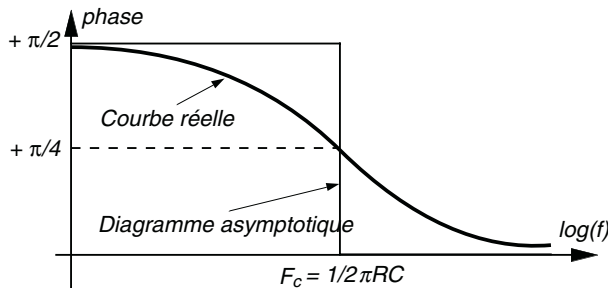


Figure 4.18. Courbe de phase d'un filtre passe-haut du 1^{er} ordre.

À partir de l'expression de $H(f)$, la transformée de Fourier inverse permet d'obtenir la réponse impulsionnelle du filtre en utilisant la transformée suivante (annexe C) :

$$s(t) = A \cdot u(t) \cdot e^{-a \cdot t} \xleftrightarrow{F} S(f) = \frac{A}{a + j2\pi f}$$

et d'autre part les propriétés de la transformée de Fourier, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + j2\pi RCf} &\xleftrightarrow{F} \frac{1}{RC} \cdot u(t) \cdot e^{-t/RC} \\ \frac{RC}{1 + j2\pi RCf} &\xleftrightarrow{F} u(t) \cdot e^{-t/RC} \\ (j2\pi f) \cdot \frac{RC}{1 + j2\pi RCf} &\xleftrightarrow{F} \frac{d}{dt} [u(t) \cdot e^{-t/RC}] \end{aligned}$$

soit le résultat représenté sur la figure 4.19 :

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} \cdot u(t) \cdot e^{-t/RC} \quad (4.25)$$

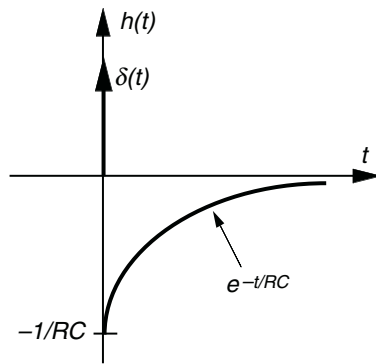


Figure 4.19. Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-haut du premier ordre.

À partir de l'expression 4.25 de $h(t)$ et de la relation générale 4.10, donnant la réponse indicielle d'un filtre, nous avons la réponse indicielle d'un filtre passe-haut du premier ordre (figure 4.20) :

$$s_{\text{ind}}(t) = e^{-t/RC} \cdot u(t) \quad (4.26)$$

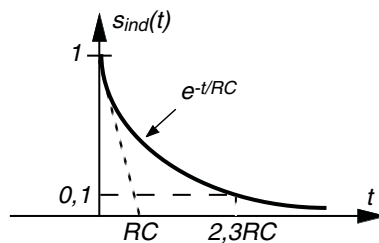


Figure 4.20. Réponse indicielle d'un filtre passe-haut du premier ordre.

Cette expression peut être obtenue de façon plus simple en utilisant le chemin de calcul : convolution dans l'espace des temps, transformée de Fourier, produit simple dans l'espace

des fréquences, transformée de Fourier inverse (paragraphe 4.3.1). Ainsi nous avons la relation initiale :

$$s_{\text{ind}}(t) = u(t) * h(t)$$

d'où :

$$S_{\text{ind}}(f) = U(f) \cdot H(f)$$

$$S_{\text{ind}}(f) = \left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \right] \cdot \left[\frac{j2\pi RCf}{1 + j2\pi RCf} \right] = \frac{RC}{1 + j2\pi RCf}$$

et

$$s_{\text{ind}}(t) = e^{-t/RC} \cdot u(t)$$

Considérons en entrée un signal de rampe non limitée de la forme suivante :

$$e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$$

À partir de la relation 3.10 représentant l'opération de convolution réalisée par le filtre et l'expression de $h(t)$, on obtient la réponse du filtre à un signal causal rampe défini ci-avant (figure 4.21) :

$$s(t) = a \cdot \tau \cdot u(t) \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right]$$

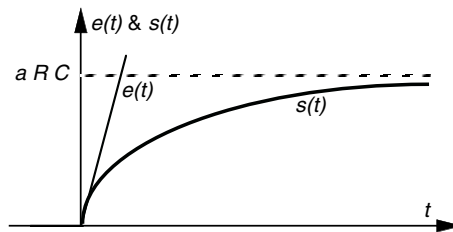


Figure 4.21. Réponse d'un filtre passe-haut du premier ordre à un signal de type rampe.

Chapitre 5

La modulation

5.1 INTRODUCTION

5.1.1 Spectre d'un signal et bande passante d'un support

Le domaine de la modulation des signaux vient du besoin de transmettre un signal physique, support d'une information, entre deux points distants. Considérons un signal à transmettre $s(t)$, ayant une représentation fréquentielle $S(f)$. Le spectre du signal, calculé par la transformée de Fourier, est en particulier caractérisé par l'encombrement fréquentiel, c'est-à-dire la zone de fréquence que le signal occupe, zone appelée *largeur de bande spectrale*. Pour tout signal réel $s(t)$, on a un spectre borné pour lequel on peut définir une fréquence minimale f_m et une fréquence maximale f_M telles que $S(f) = 0$ pour toute fréquence f inférieure à f_m et supérieure à f_M (figure 5.1, page suivante). Par exemple nous avons :

- signal de parole « téléphonie » : $f_m = 300$ Hz et $f_M = 3,4$ kHz
- signal sonore « haute fidélité » : $f_m = 20$ Hz et $f_M = 16$ kHz

La transmission de ce signal va être effectuée soit à l'aide d'un support physique de transmission qui peut être un câble métallique (paire bifilaire, câble coaxial) ou une fibre optique, soit en utilisant une propagation libre d'ondes hertziennes.

De la même façon que pour le signal, une voie de transmission est nécessairement imparfaite et donc ne laisse passer que certaines fréquences. Cette bande de fréquences, dans laquelle les signaux sont « correctement » transmis, caractérise le support de transmission ; elle est appelée *bande passante du support*. Cette bande

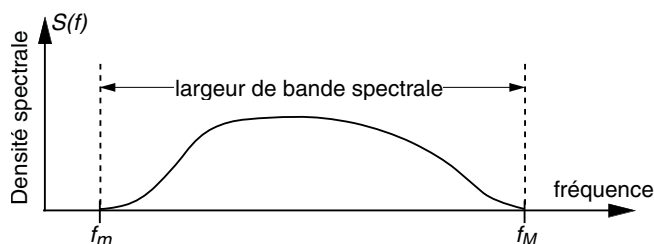


Figure 5.1. Représentation spectrale d'un signal à transmettre.

passante est généralement définie par rapport à la valeur du rapport de la puissance du signal à la sortie sur la puissance du signal à l'entrée (paragraphe 3.1.1). Par exemple, dans le cas d'une bande passante définie à -3 dB, la puissance de sortie sera égale à la moitié de la puissance du signal d'entrée (figure 5.2).

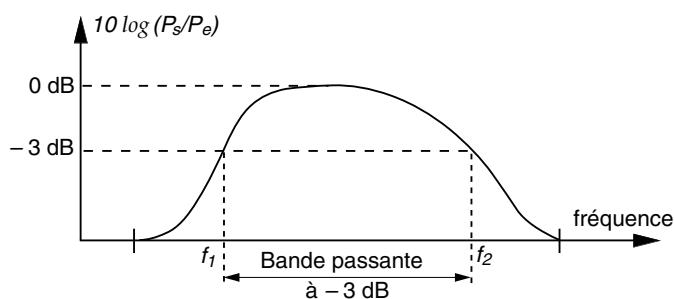


Figure 5.2. Bande passante d'une voie de transmission.

Ainsi, en fonction des caractéristiques spectrales du signal à propager, le choix du câble est guidé par une modification moindre du signal et par une protection contre les bruits externes. D'un point de vue pratique, il est possible de réaliser un tableau comparatif des différents câbles suivant trois critères : fréquence maximale, mise en œuvre et immunité aux bruits (tableau 5.1).

TABLEAU 5.1. Comparatif des différents câbles utilisés dans les communications.

Câble	Longueur	Fréquence maximale	Mise en œuvre	Immunité aux bruits
Câble plat	très faible ($< 0,5$ m)	faible (< 10 kHz)	simple	non
Paire torsadée	moyenne (≈ 10 m)	moyenne (< 1 MHz)	simple	oui, moyenne
Câble coaxial	moyenne (≈ 10 m)	grande (< 100 MHz)	difficile (contrainte mécanique de torsion)	oui, grande
Fibre optique	Grande ($\approx$ km)	très grande	très difficile (contrainte mécanique torsion et transformation du signal optique-électrique)	oui, très grande

5.1.2 Types de transmission

Les deux caractéristiques, présentées précédemment (largeur spectrale du signal et bande passante du support), conduisent aux deux remarques suivantes :

- le spectre du signal que l'on désire transmettre doit être compris dans la bande passante du support de la voie de transmission si l'on veut avoir une réception correcte sans déformation par la propagation dans le support (exemple : transmission impossible d'un signal télévision HF sur un simple câble bifilaire) ;
- si le support de la voie de transmission a une très large bande passante par rapport au signal à transmettre, il est évident que l'utilisation de la voie de transmission n'est pas optimisée (exemple : utilisation d'une fibre optique pour transmettre une seule ligne téléphonique).

Ces deux remarques permettent de distinguer les deux techniques de transmission de signaux utilisées :

- *transmission en bande de base* : les signaux sont transmis tels qu'ils sortent de la source, c'est-à-dire dans leur bande de fréquence originale. Cette technique est utilisée chaque fois que le milieu de transmission convient au sens des domaines fréquentiels et que les conditions économiques permettent de consacrer un support physique à chaque communication (exemple : réseaux locaux informatiques) ;
- *transmission par modulation* : cette opération consiste à transposer un signal en un autre signal contenant la même information, mais avec une modification en fréquence du signal.

Ce dernier mode de transmission par modulation, que nous allons étudier, présente essentiellement deux avantages :

- le *multiplexage fréquentiel* : utilisation du même support de transmission par plusieurs communications ;
- l'*adaptation aux conditions particulières d'un milieu de transmission* : insensibilisation aux parasites, augmentation des distances de propagation, etc.

5.1.3 Les différentes formes de modulation

La modulation d'un signal utilise un signal sinusoïdal $s_p(t)$ de fréquence f_p , appelé onde porteuse :

$$s_p(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \quad \text{avec } f_p = \Omega/(2\pi)$$

Ce signal ou onde porteuse V_p est utilisé pour transmettre le signal « informatif » en modifiant l'une de ses caractéristiques, c'est-à-dire que l'un des paramètres de l'onde porteuse va varier au « rythme » du signal à transmettre. Les trois possibilités de modification ou modulation sont donc :

- amplitude A du signal porteur : *modulation d'amplitude (MA)* ;
- fréquence f_p du signal porteur : *modulation de fréquence (MF)* ;
- phase φ du signal porteur : *modulation de phase*.

Il est à remarquer que la fréquence porteuse f_p est en général très supérieure à la plus haute fréquence f_M du signal à transmettre.

Ces trois types de modulations sont appelés « modulation finale » permettant de créer le signal directement émis par l'émetteur. De plus il est possible dans certains cas d'associer deux types de modulation (par exemple la modulation d'amplitude et de phase).

La comparaison de ces différents modes de modulation et le choix de l'une de ces méthodes se font sur la base de nombreux critères (immunité aux bruits ou qualité de la transmission, facilité de réalisation, coût, etc.).

5.2 MODULATION D'AMPLITUDE

5.2.1 Principe de la modulation d'amplitude

L'onde porteuse est définie par $s_p(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$ et le signal modulant $s(t)$ à transmettre est supposé vérifier la propriété suivante :

$$|s(t)|_{\max} \leq 1$$

L'expression du signal modulé en amplitude $s_{\text{OMA}}(t)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$s_{\text{OMA}}(t) = A \cdot [1 + m \cdot s(t)] \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \quad (5.1)$$

où m est le taux de modulation (exprimé en pour-cent de la profondeur de modulation), nombre compris entre 0 et 1 tel que l'expression entre crochets soit toujours positive.

Si on observe le signal modulé pendant une durée de plusieurs périodes de l'onde porteuse, on voit varier l'amplitude instantanée de cette onde en fonction du signal $s(t)$ (figure 5.3). Dans le cas où l'amplitude maximale du signal $s(t)$ est égale à 1, l'amplitude positive de l'onde porteuse varie de $A(1 + m)$ à $A(1 - m)$ et l'amplitude négative entre $-A(1 + m)$ et $-A(1 - m)$. On parlera d'enveloppe du signal modulé.

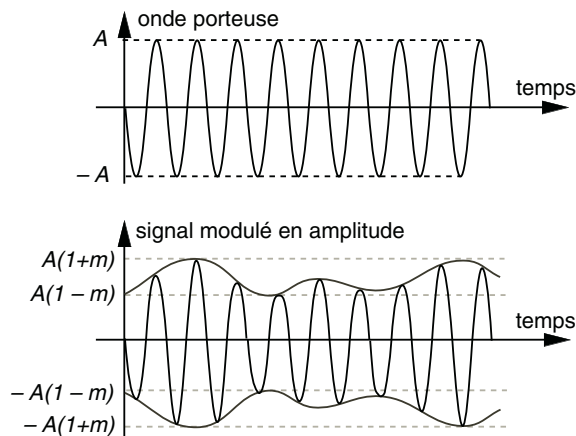


Figure 5.3. Onde porteuse et signal modulé en amplitude.

a) Étude spectrale d'un signal modulé en amplitude

► Cas particulier : $s(t) = \cos(\omega t)$

Dans ce cas particulier, nous pouvons écrire :

$$s_{\text{OMA}}(t) = A \cdot [1 + m \cdot \cos(\omega t)] \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$$

Soit :

$$s_{\text{OMA}}(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \varphi) + \frac{mA}{2} \cdot [\cos((\Omega - \omega)t + \varphi) + \cos((\Omega + \omega)t + \varphi)]$$

Le spectre se compose donc de trois raies : Ω onde porteuse, $\Omega - \omega$ raie latérale inférieure et $\Omega + \omega$ raie latérale supérieure (figure 5.4). La largeur spectrale occupée par le spectre est de 2ω .

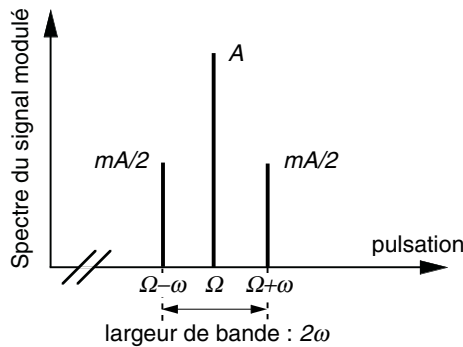


Figure 5.4. Représentation de la densité spectrale d'un signal modulé en amplitude par un signal sinusoïdal.

► Cas général : $s(t)$ quelconque

Dans ce cas général, le signal $s(t)$ peut s'exprimer suivant sa décomposition en série de Fourier, c'est-à-dire :

$$s(t) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t)$$

Cette décomposition est supposée limitée aux $n + 1$ premiers termes, soit pour $i > n$, $a_i = 0$. Donc nous avons un spectre borné qui peut être représenté de façon continue en supposant les raies très proches, c'est-à-dire la différence entre les ω_i très petite (figure 5.5, page suivante). En posant $m_i = m \cdot a_i$, l'expression du signal modulé est donnée par :

$$s_{\text{OMA}}(t) = A \cdot \left[1 + \sum_{i=0}^n m_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t) \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi) \right]$$

Soit :

$$s_{\text{OMA}}(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \varphi) + \sum_{i=0}^n \frac{A \cdot m_i}{2} \cdot [\cos((\Omega - \omega_i)t + \varphi) + \cos((\Omega + \omega_i)t + \varphi)]$$

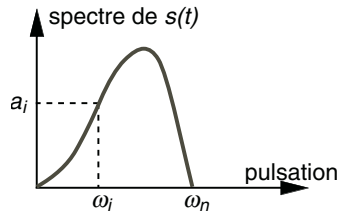


Figure 5.5. Spectre tronqué à ω_n d'un signal modulant quelconque.

Cette représentation conduit à une représentation spectrale unilatérale $S_{OMA}(f)$ se présentant sous la forme d'une raie centrale de pulsation Ω identique au cas précédent et de deux bandes latérales s'étendant de Ω à $\Omega + \omega_n$ (bande latérale supérieure) et de Ω à $\Omega - \omega_n$ (bande latérale inférieure) (figure 5.6). La largeur spectrale est donc de $2\omega_n$. Ainsi si l'on désire transporter par un même canal plusieurs informations de type basse fréquence (BF), l'écart minimal entre les porteuses doit être de $2\omega_n$.

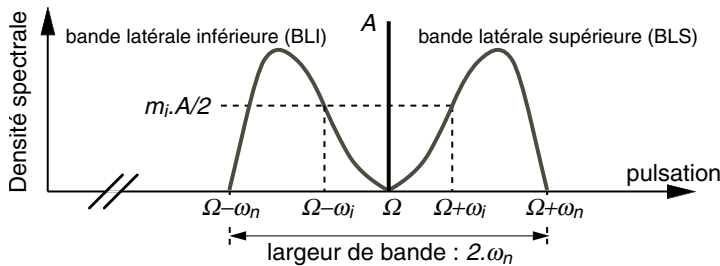


Figure 5.6. Représentation de la densité spectrale d'un signal modulé en amplitude par un signal quelconque à spectre borné à ω_n .

Remarque : En radiodiffusion où le spectre des signaux BF a été volontairement tronqué à 4,5 kHz, chaque émetteur occupe autour de sa fréquence porteuse une largeur spectrale de 9 kHz. Ainsi pour la gamme « Grandes Ondes » (GO), située entre 150 kHz et 450 kHz, il peut théoriquement être placé environ 30 émetteurs. En réalité, afin d'éviter toutes les interférences une zone non utilisée, dite de silence, a été placée entre les émissions et seule une quinzaine d'émetteurs peuvent coexister.

b) Puissance en modulation d'amplitude

► Puissance moyenne de l'onde porteuse

Par définition, pour un signal de l'onde porteuse $s_p(t)$, nous avons :

$$P_{OP} = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{T_p} [s_p(t)]^2 \cdot dt \propto \frac{A^2}{2} \quad \text{avec} \quad T_p = \frac{2\pi}{\Omega}$$

► Puissance crête de l'onde modulée en amplitude

Pour un signal modulé en amplitude, la puissance crête est la puissance moyenne obtenue lorsque le signal modulant est maximum :

$$P_c = P_{OP} \cdot [1 + m]^2 \quad \text{avec} \quad |s(t)|_{\max} = 1$$

► Puissance moyenne de l'onde modulée en amplitude

Étant donné que nous avons $T_0 \gg T_p$ (T_0 la période du signal modulant $s(t)$), le signal $s(t)$ peut être considéré comme constant sur cette période. Ainsi le calcul de la puissance de l'OMA sur la période de la porteuse T_p donne :

$$P_{\text{OMA}} = \frac{A^2}{2} \cdot [1 + m \cdot s(t)]^2$$

Le calcul de la puissance de l'OMA sur la période du signal modulant est :

$$P_{\text{OMA}} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} A^2 \cdot [1 + m \cdot s(t)]^2 \cdot \cos^2(\Omega t) \cdot dt$$

Soit :

$$P_{\text{OMA}} = \frac{A^2}{2T_0} \cdot \left[\int_0^{T_0} [1 + m \cdot s(t)]^2 dt + \int_0^{T_0} [1 + m \cdot s(t)]^2 \cdot \cos(2\Omega t) \cdot dt \right]$$

Or, comme le signal $s(t)$ peut être considéré comme constant sur la période de l'onde porteuse T_p , il vient :

$$P_{\text{OMA}} = \frac{A^2}{2 \cdot T_0} \cdot \int_0^{T_0} [1 + 2 \cdot m \cdot s(t) + m^2 \cdot s^2(t)] dt$$

En posant $\overline{s(t)}$ la valeur moyenne du signal :

$$\overline{s(t)} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s(t) \cdot dt$$

et $\overline{s^2(t)}$ la valeur quadratique définie par :

$$\overline{s^2(t)} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} s^2(t) \cdot dt$$

nous avons :

$$P_{\text{OMA}} = P_{\text{OP}} \cdot \left[1 + 2 \cdot m \cdot \overline{s(t)} + m^2 \cdot \overline{s^2(t)} \right]$$

Pour un signal sinusoïdal modulant, on obtient :

$$P_{\text{OMA}} = P_{\text{OP}} \cdot \left[1 + \frac{m^2}{2} \right]$$

► Résumé et conclusion

Dans le cas le plus favorable sur le plan énergétique, c'est-à-dire pour un taux de modulation $m = 1$ et un signal sinusoïdal modulant, nous avons :

$$P_c = 4 \cdot P_{\text{OP}} \quad \text{et} \quad P_{\text{OMA}} = \frac{3}{2} \cdot P_{\text{OP}}$$

Il est important de remarquer que la puissance crête ne dépend que du taux de modulation m , alors que la puissance moyenne de l'onde modulée en amplitude dépend de m et aussi de la forme du signal modulant.

5.2.2 Systèmes dérivés de la modulation d'amplitude

L'étude de systèmes dérivés de la modulation d'amplitude provient de deux constatations :

- d'une part, une proportion très importante de la puissance transmise par le canal est affectée à la porteuse : $2/3$ dans le cas d'un taux de modulation de 1 et d'un signal sinusoïdal modulant ;
- d'autre part, on peut remarquer que les deux bandes latérales correspondant au signal modulant transportent la même information.

a) Modulation à porteuse supprimée

La modulation d'amplitude à porteuse supprimée consiste à éliminer la porteuse dans la transmission. Le signal modulé théorique s'exprime de la façon suivante :

$$s_{\text{OMA}}(t) = A \cdot s(t) \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$$

En réalité, cette transmission d'information, plus économique du point de vue énergétique, présente un inconvénient majeur au niveau de la détection puisque le récepteur ne disposant plus de la référence de la fréquence porteuse Ω , devient très complexe à réaliser. Ce problème est éliminé en transmettant un embryon d'onde porteuse, suffisant pour la détection. Comme nous le verrons (paragraphe 5.2.3), cette modulation se réalise très facilement avec un système de modulation en anneau, qui permet de conserver une petite partie de l'onde porteuse.

b) Modulation à bande latérale unique

Afin de supprimer la redondance des signaux transmis au niveau des deux bandes latérales, on réduit de moitié la largeur du canal pour ne transmettre qu'une bande latérale : modulation à bande latérale unique (BLU). En considérant le signal modulant sous la forme d'une décomposition en série de Fourier limitée au terme n , pour la bande latérale supérieure (BLS), le signal modulé s'exprime par :

$$s_{\text{OMA-BLS}}(t) = \frac{A}{2} \cdot \sum_{i=0}^n a_i \cdot \cos((\Omega + \omega_i)t + \varphi)$$

et pour la bande latérale inférieure (BLI) par :

$$s_{\text{OMA-BLI}}(t) = \frac{A}{2} \cdot \sum_{i=0}^n a_i \cdot \cos((\Omega - \omega_i)t + \varphi)$$

Ce système de modulation peut être réalisé à partir des signaux obtenus lors de la modulation d'amplitude classique en filtrant la bande latérale non utilisée

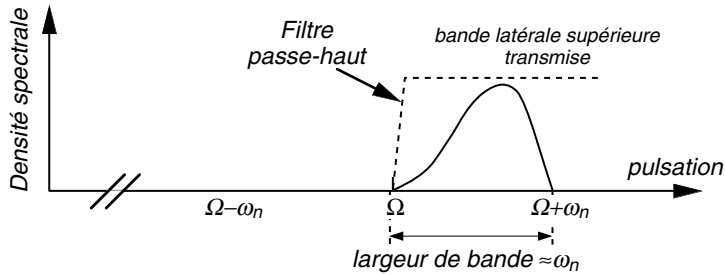


Figure 5.7. Représentation de la densité spectrale d'un signal modulé en amplitude à bande latérale unique (BLU) : transmission de la bande latérale supérieure et d'un embryon de porteuse.

(figure 5.7). Ce type de modulation conduit à un spectre utile de largeur de bande égale ou légèrement supérieure à ω_n . En effet, dans ce cas, une partie faible de l'onde porteuse peut être aussi transmise pour permettre une détection plus facile, rejoignant ainsi le cas suivant.

c) Modulation à bande latérale résiduelle

Ce type de modulation réalise un compromis entre la modulation d'amplitude complète avec son occupation spectrale large et la modulation à bande latérale unique avec les difficultés de synchronisation à la réception. La modulation d'amplitude à bande latérale résiduelle est obtenue à partir d'un signal de modulation complète filtré afin d'éliminer partiellement l'une des bandes latérales et de diminuer l'amplitude de l'onde porteuse (figure 5.8).

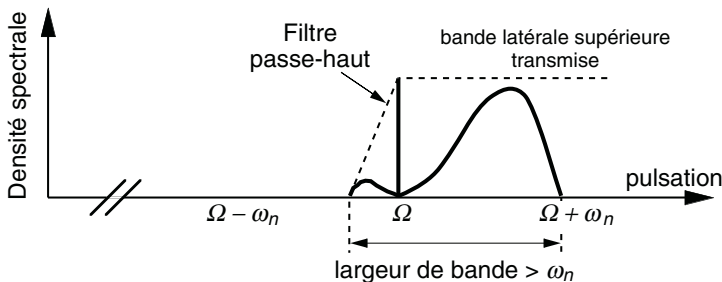


Figure 5.8. Représentation de la densité spectrale d'un signal modulé en amplitude à bande latérale résiduelle : transmission de la bande latérale supérieure, d'une partie de la porteuse et d'une faible partie de la bande latérale inférieure.

Remarque : Ce procédé de modulation est utilisé en télévision. En effet le signal vidéo à transmettre a une largeur de bande importante (5 MHz) excluant ainsi une modulation d'amplitude complète en raison de l'occupation spectrale. De plus le signal vidéo contient des fréquences basses ce qui conduirait à un filtrage très difficile pour une modulation BLU.

d) Modulation à deux porteuses en quadrature

Cette modulation permet de diminuer la largeur spectrale du signal modulé en utilisant deux ondes porteuses.

Cette technique consiste à diviser le signal informatif $s(t)$ en deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ modulant deux porteuses $s_{p1}(t)$ et $s_{p2}(t)$ de même fréquence et en quadrature de phase :

$$s_{p1}(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad s_{p2}(t) = A \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$$

Les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ peuvent être constitués en prenant deux composantes de $s(t)$: données paires et impaires, la composante de droite et la composante de gauche d'un signal stéréophonique, etc. Le dédoublement du signal à la sortie du codeur permet de diviser par deux la rapidité de modulation et donc de diminuer la largeur spectrale par le même facteur. Par conséquent, on retrouve une occupation spectrale du signal modulé identique à une modulation BLU du signal initial $s(t)$. Ce type de modulation est très utilisé dans le domaine de la modulation des signaux numériques.

5.2.3 Procédés de modulation, l'émetteur

La modulation est une opération essentiellement non linéaire, un circuit ou un composant non linéaire du deuxième ordre (diode, transistor) est donc nécessaire pour obtenir la porteuse modulée à partir du signal de porteuse pure et signal modulant BF. Dans le cas de circuit non linéaire, le signal de sortie $s(t)$ est une fonction du signal d'entrée $e(t)$ de la forme :

$$s(t) = a + b \cdot e(t) + c \cdot e^2(t)$$

Si le signal d'entrée $e(t)$ est directement lié au signal de l'onde porteuse et au signal modulant (par exemple la somme des deux signaux), nous obtenons en sortie un signal comportant de nombreuses composantes fréquentielles (figure 5.9). Seules les composantes correspondant à l'OMA, obtenues après filtrage, seront utilisées pour la transmission.

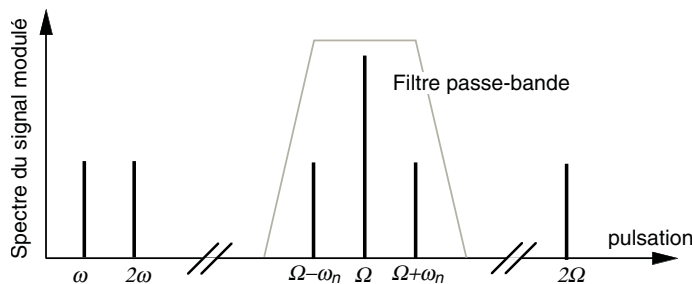


Figure 5.9. Représentation spectrale du signal en sortie du modulateur utilisant un système non linéaire.

Les deux structures principales de circuit utilisées sont les systèmes à « modulation à addition et amplification non linéaire » et « modulation à multiplication ». Un

troisième schéma de circuit, modulation en anneau, est utilisé pour les modulations sans porteuse.

a) Modulation à addition et amplification non linéaire

L'utilisation d'un élément non linéaire (diode) comme amplificateur de la somme des deux signaux « porteuse et modulant » conduit à produire les composantes fréquentielles nécessaires à l'OMA (figure 5.10).

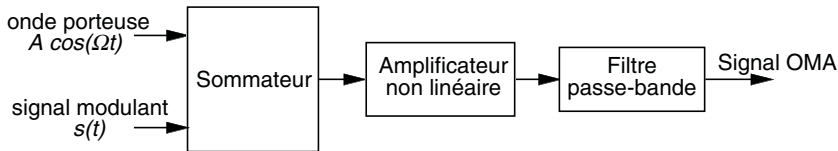


Figure 5.10. Modulateur à addition et amplification non linéaire.

b) Modulation à multiplication de signaux

La méthode idéale consiste à utiliser un multiplieur analogique, qui effectue directement le produit du signal porteur par $[1 + ms(t)]$. Ce multiplieur peut être représenté par un amplificateur linéaire dont le gain est le signal modulant (figure 5.11).

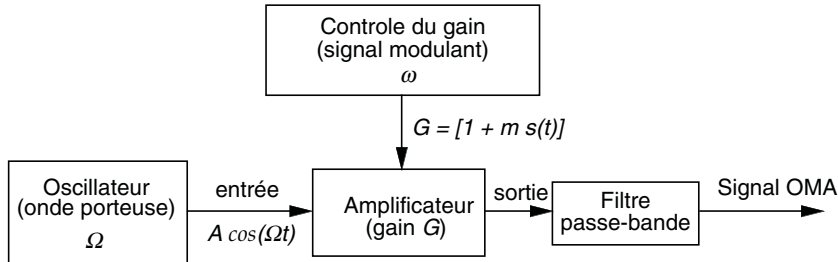


Figure 5.11. Modulateur à multiplication de signaux.

Des circuits multiplieurs ont été développés spécifiquement pour cette application, permettant des modulations jusqu'à 100 %.

c) Modulateur en anneau

Considérons le circuit représenté sur la figure 5.12, page suivante comportant un anneau de diodes supposées idéales. La conduction ou le blocage des diodes deux à deux (D1,D2 et D3,D4) sont pilotés par l'onde porteuse :

- pendant une demi-période de la porteuse D1,D2 conduisent, D3,D4 sont bloquées et le transformateur présente un rapport $+1$ entre l'entrée et la sortie ;
- pendant l'autre demi-période D1,D2 sont bloquées, D3,D4 conduisent et le transformateur présente un rapport -1 entre l'entrée et la sortie.

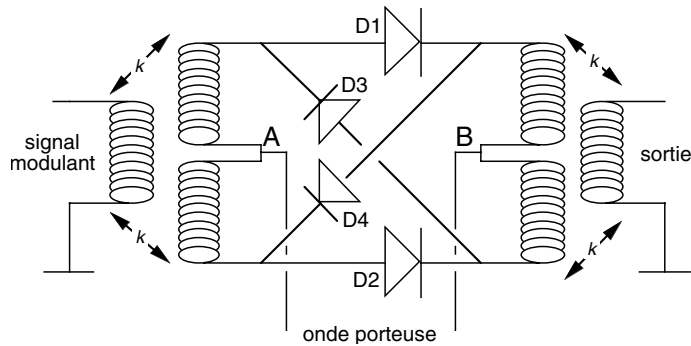


Figure 5.12. Schéma de principe d'un système « modulateur en anneau ».

La sortie peut être modélisée par le produit du signal modulant et d'un signal carré d'amplitude $+1$, -1 et de fréquence identique à celle de l'onde porteuse. On obtient ainsi le spectre du signal de sortie représenté sur la figure 5.13. Pour obtenir le spectre de l'OMA désirée, il suffit d'utiliser un filtre passe-bas ou passe-bande.

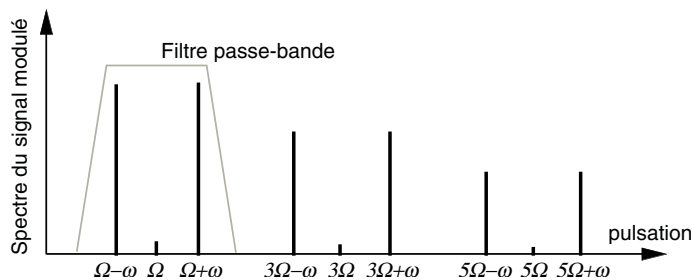


Figure 5.13. Représentation spectrale d'un signal modulé par un système « modulateur en anneau ».

Il est à remarquer que ce système de modulation, qui théoriquement ne donne pas un signal à la fréquence porteuse, fait apparaître un embryon de porteuse du fait de la dissymétrie pratique des rapports k des transformateurs et de certains composants électroniques.

5.2.4 Procédés de démodulation, le récepteur

La démodulation ou détection est l'opération inverse de la modulation, il s'agit à partir de la porteuse HF modulée de reconstituer le signal BF modulant. Deux techniques permettent de réaliser cette détection : la démodulation synchrone et la démodulation d'enveloppe.

a) Démodulation synchrone

Le principe de ce détecteur, représenté schématiquement sur la figure 5.14, page ci-contre, consiste à réaliser le produit du signal modulé et d'un signal de pulsation Ω_0 proche de la fréquence de l'onde porteuse Ω . Soient les deux signaux en entrée :

– onde modulée en amplitude (OMA) :

$$s_{\text{OMA}}(t) = A \cdot [1 + m \cdot s(t)] \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$$

– onde locale (OL) :

$$s_{\text{OL}}(t) = B \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

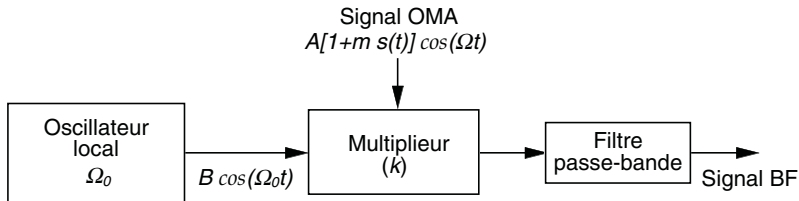


Figure 5.14. Structure schématique d'un détecteur synchrone.

Le signal de sortie du multiplieur est donc :

$$s_{\text{sortie}}(t) = k \cdot s_{\text{OMA}}(t) \cdot s_{\text{OL}}(t)$$

ou

$$s_{\text{sortie}}(t) = \frac{kAB}{2} \times [1 + ms(t)] \times [\cos((\Omega - \Omega_0)t + (\varphi - \varphi_0)) + \cos((\Omega + \Omega_0)t + (\varphi + \varphi_0))]$$

Si on réalise un calage de l'oscillateur local, c'est-à-dire que $\Omega = \Omega_0$, le signal de sortie, filtré par un filtre passe-bande (capacité en série pour éliminer la composante continue), est directement proportionnel au signal BF modulant initial : $s_{\text{sortie}}(t) \approx s(t)$. Cette détection synchrone s'applique à toutes les formes de signaux modulés en amplitude à condition qu'un signal de porteuse soit émis (signal faible) pour synchroniser ou « caler » l'oscillateur local.

b) Démodulation d'enveloppe

La détection d'enveloppe, aussi appelée détection linéaire, utilise contrairement à sa deuxième appellation un composant non linéaire : une diode montée selon le schéma du redressement mono-alternance (figure 5.15).

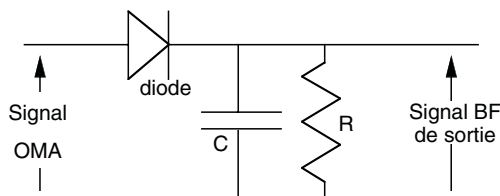


Figure 5.15. Circuit détecteur d'enveloppe.

En supposant que la capacité C n'est pas connectée à la sortie de la diode, le signal BF de sortie représente la moitié du signal de l'OMA (figure 5.16). En choisissant la constante de temps du filtre RC très supérieure à la période du signal modulant et très inférieure à la période de l'onde porteuse, le signal BF de sortie sera constitué de l'enveloppe du signal. La diode étant un composant non linéaire, le signal obtenu en sortie devra être filtré afin d'isoler la composante basse fréquence utile (figure 5.17).

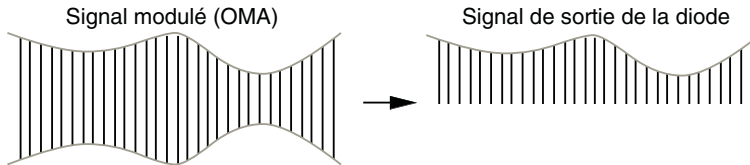


Figure 5.16. Redressement mono-alternance du signal de l'OMA.

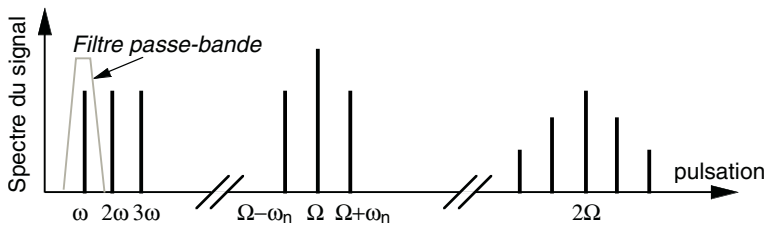


Figure 5.17. Spectre du signal réel obtenu à la sortie du détecteur d'enveloppe.

5.3 MODULATION EXPONENTIELLE

5.3.1 Principe de la modulation exponentielle

a) Définition de la modulation exponentielle

Le signal de l'onde porteuse peut s'écrire sous la forme vue précédemment :

$$s_p(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi)$$

ou encore sous une forme faisant intervenir la *phase instantanée* $\varphi_i(t)$ et avec la notation complexe :

$$s_p(t) = A \cdot \cos(\varphi_i(t)) \quad \text{ou} \quad s_p(t) = e^{j\varphi_i(t)}$$

Cette dernière représentation explique le nom donné à ce type de modulation : la modulation exponentielle consistant à faire varier au rythme du signal modulant la grandeur de la fonction exponentielle, par opposition à la modulation d'amplitude. Cette modulation est aussi appelée *modulation angulaire ou d'angle* puisqu'elle concerne une variation de la phase instantanée.

Nous pouvons aussi définir la pulsation instantanée $\Omega_i(t)$:

$$\Omega_i(t) = \frac{d\varphi_i(t)}{dt}$$

Ce sont ces grandeurs $\varphi_i(t)$ et $\Omega_i(t)$ qui vont être modifiées en fonction d'un signal BF à transmettre. Suivant les caractéristiques de cette modification, nous aurons une modulation de fréquence (MF) qui est une action linéaire sur la pulsation instantanée $\Omega_i(t)$ ou une modulation de phase (MP) qui agit de façon linéaire sur la phase instantanée $\varphi_i(t)$. Ainsi, le tableau 5.2 montre une présentation parallèle de ces deux types de modulation dans le cas d'un signal modulant quelconque $s(t)$. Nous pouvons remarquer que, d'un point de vue mathématique, la seule différence entre les expressions de l'onde modulée en fréquence et en phase est la dérivation du signal modulant.

TABLEAU 5.2. Définitions des modulations de fréquence et de phase.

Modulation de fréquence	Modulation de phase
$\Omega_i(t) = \Omega_0 + \Delta\Omega \cdot s(t)$ avec $\Delta\Omega$: excursion de fréquence – phase instantanée : $\varphi_i(t) = \int_0^t \Omega_i(t) dt = \Omega_0 t + \Delta\Omega \int_0^t s(t) dt$ – expression de l'onde modulée : $s_{OMF}(t) = A \cdot \cos \left[\Omega_0 t + \Delta\Omega \int_0^t s(t) dt \right]$	$\varphi_i(t) = \Omega_0 \cdot t + \Delta\varphi \cdot s(t)$ avec $\Delta\varphi$: excursion de phase – pulsation instantanée : $\Omega_i(t) = \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \Omega_0 + \Delta\varphi \cdot \frac{ds(t)}{dt}$ – expression de l'onde modulée : $s_{OMP}(t) = A \cdot \cos[\Omega_0 \cdot t + \Delta\varphi \cdot s(t)]$

b) Application à un signal sinusoïdal modulant

Pour un signal modulant cosinusoidal $s(t) = \cos(\omega t)$, nous obtenons aisément le résultat des relations précédentes et définissons les grandeurs caractérisant les excursions de fréquence et de phase indiquant les domaines de variation de la fréquence et de la phase respectivement autour de la valeur centrale Ω_0 ou $\varphi_0 = \Omega_0 \cdot t$ (tableau 5.3, page suivante).

De plus, dans ce cas simple d'un signal modulant à deux niveaux, nous pouvons faire une comparaison graphique des deux modulations de type exponentiel avec la modulation d'amplitude (figure 5.18, page suivante).

5.3.2 La modulation de fréquence

a) OMF dans le cas d'un signal sinusoïdal modulant

► Spectre de l'onde modulée en fréquence

Dans le cas d'un signal modulant cosinusoidal (fréquence f ou pulsation ω), nous venons de voir l'expression de l'onde modulée :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot \cos \left[\Omega_0 t + \frac{\Delta\Omega}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \right] \quad \text{avec} \quad m = \frac{\Delta\Omega}{\omega} = \frac{\Delta F}{f}$$

TABLEAU 5.3. Modulations de fréquence et de phase (cas d'un signal cosinusoidal).

Modulation de fréquence	Modulation de phase
$\Omega_i(t) = \Omega_0 + \Delta\Omega \cdot \cos(\omega t)$ avec $\Delta\Omega$: excursion de fréquence – phase instantanée : $\varphi_i(t) = \Omega_0 t + \frac{\Delta\Omega}{\omega} \cdot \sin(\omega t)$ – indice de modulation : $m = \frac{\Delta\Omega}{\omega}$ – excursion de phase : $\pm \frac{\Delta\Omega}{\omega} = \pm m$ – expression de l'onde modulée : $s_{OMF}(t) = A \cdot \cos \left[\Omega_0 t + \frac{\Delta\Omega}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \right]$	$\varphi_i(t) = \Omega_0 \cdot t + \Delta\varphi \cdot \cos(\omega t)$ avec $\Delta\varphi$: excursion de phase – pulsation instantanée : $\Omega_i(t) = \Omega_0 - \Delta\varphi \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$ – excursion de fréquence : $\pm \Delta\varphi \cdot \omega$ – expression de l'onde modulée : $s_{OMP}(t) = A \cdot \cos[\Omega_0 \cdot t + \Delta\varphi \cdot \cos(\omega t)]$

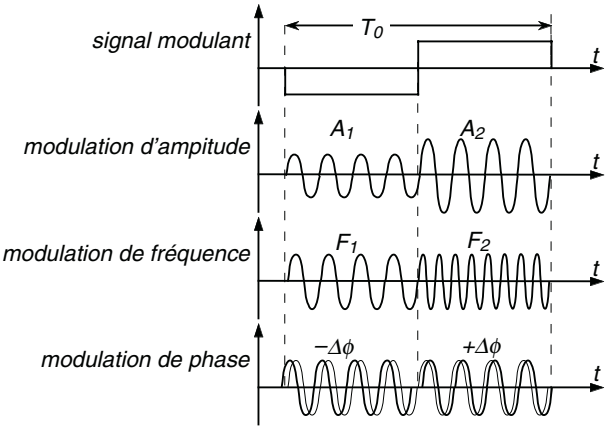


Figure 5.18. Comparaison des modulations d'amplitude, de fréquence et de phase pour un signal modulant à deux niveaux.

Afin d'obtenir le spectre de ce signal modulé, nous allons développer cette expression. Soit :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot [\cos(\Omega_0 t) \cdot \cos(m \cdot \sin(\omega t)) - \sin(\Omega_0 t) \cdot \sin(m \cdot \sin(\omega t))]$$

Pour pouvoir obtenir une relation sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions sin et cos, nous devons expliciter les deux termes $\cos[m \cdot \sin \alpha]$ et $\sin[m \cdot \sin \alpha]$. En utilisant les fonctions de Bessel $J_n(m)$ de première espèce d'ordre n et de variable m (figure 5.19, page ci-contre), nous avons :

$$\cos(m \cdot \sin \alpha) = J_0(m) + 2 \cdot J_2(m) \cdot \cos(2\alpha) + 2 \cdot J_4(m) \cdot \cos(4\alpha) + \dots$$

et

$$\sin(m \cdot \sin \alpha) = 2 \cdot J_1(m) \cdot \sin \alpha + 2 \cdot J_3(m) \cdot \cos(3\alpha) + \dots$$

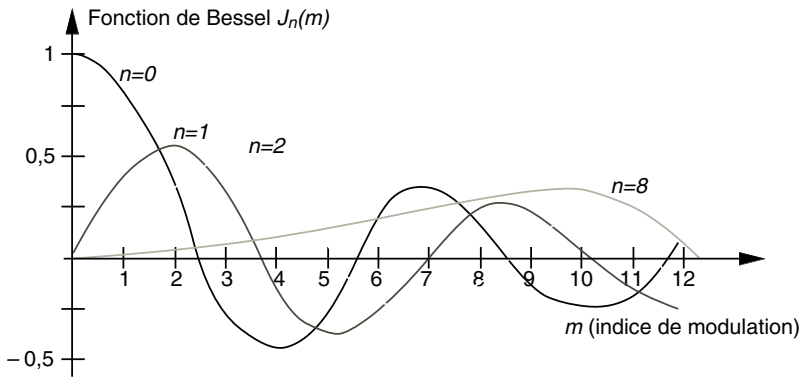


Figure 5.19. Fonctions de Bessel de première espèce pour $n = 0$.

On obtient en développant l'expression précédente de $s_{\text{OMF}}(t)$ la forme suivante :

$$s_{\text{OMF}}(t) = A \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \cdot \cos((\Omega_0 + n\omega) \cdot t)$$

Le spectre contient donc une infinité de raies latérales de part et d'autre de la fréquence de l'onde porteuse F_0 . Pour un indice de modulation donné m , la fonction de Bessel $J_n(m)$ représente l'amplitude de la raie de fréquence $F_0 + nf$ (ou pulsation : $\Omega_0 + n\omega$).

► Principales caractéristiques du spectre de l'OMF

L'évolution des fonctions de Bessel $J_n(m)$ et leurs propriétés vont permettre de donner les principales caractéristiques du spectre de l'onde modulée en fréquence (OMF).

Étant donné la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées des fonctions de Bessel, les deux raies latérales du spectre de fréquence $F_0 \pm nf$ ont des amplitudes de même module, le spectre est symétrique par rapport à la fréquence F_0 :

$$J_{-n}(m) = (-1)^n \cdot J_n(m)$$

Bien que le nombre de raies et, par conséquent, la largeur de bande du signal secondaire soient théoriquement infinis, l'amplitude des raies latérales éloignées de F_0 finit par décroître. En effet les fonctions de Bessel $J_n(m)$ ont une amplitude décroissante lorsque n augmente à m constant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{J_n(m)\} = 0$$

Cette décroissance est d'autant plus tardive que m est plus élevé. En effet, il est intuitif que, si ΔF est l'excursion de fréquence, ces raies latérales doivent avoir une amplitude significative dans la zone $F_0 \pm \Delta F$, c'est-à-dire dans la zone $F_0 \pm mf$. En effet, la propriété précédente des fonctions de Bessel peut se traduire par (tableau 5.4, page suivante) :

$$J_n(m) \approx 0 \quad \text{pour } n > m$$

TABEAU 5.4. Amplitude de la composante $F_0 + nf$ du spectre pour différentes valeurs de m avec l'indication de la limitation du spectre à $m + 1$.

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 5$	$m = 10$
0	0,77	0,22	0,18	0,25
1	0,44	0,58	0,32	0,04
2	<u>0,11</u>	0,35	0,046	0,25
3	0,02	<u>0,129</u>	0,36	0,06
4	0,0025	0,034	0,39	0,22
5		0,007	0,26	0,23
6		0,001	<u>0,13</u>	0,014
7			0,05	0,22
8			0,02	0,32
9			0,005	0,29
10			0,002	0,21
11				<u>0,123</u>
12				0,063
13				0,029
14				0,012
15				0,005

Cette propriété est très importante car elle permet de déterminer la largeur utile du spectre, c'est-à-dire la bande de fréquence utilisée réellement par l'OMF.

Pour déterminer cette largeur de spectre, il faut se donner une valeur limite pour laquelle la composante de fréquence $n \cdot f$ ne sera plus prise en compte. Si l'on considère que seules les raies d'amplitude dépassant 10 % de l'amplitude de la porteuse non modulée sont conservées, la largeur utile du spectre peut s'exprimer en se limitant à la valeur $n = m + 1$ (règle de Carson) :

$$L_{\text{utile, OMF}} = 2 \cdot [1 + m + \sqrt{m}] \cdot f \quad \text{ou} \quad L_{\text{utile, OMF}} \approx 2 \cdot [1 + m] \cdot f = 2 \cdot [f + \Delta f]$$

Il est important de remarquer que, par rapport à la modulation d'amplitude, nous avons dans ce cas une largeur de spectre $(1 + m)$ fois plus grande :

$$L_{\text{utile, OMA}} = 2 \cdot f \quad \text{et} \quad L_{\text{utile, OMF}} \approx 2 \cdot [1 + m] \cdot f$$

De plus si la fréquence du signal modulant est petite devant l'excursion de fréquence ($m \gg 1$), on a :

$$L_{\text{utile, OMF}} \approx 2 \cdot \Delta f = 2 \cdot m \cdot f$$

► Spectre en fonction de l'indice de modulation

Il est intéressant de connaître la raie d'amplitude maximale dans le spectre pour un indice de modulation m donné. La figure 5.20, page ci-contre, donne la position du maximum de la fonction de Bessel $J_n(m)$, c'est-à-dire que, pour m fixé, la valeur n_0 obtenue est telle que $J_n(m)$ est décroissante pour $n > n_0$. Nous pouvons ainsi noter que la position de la composante d'amplitude maximale s'éloigne de F_0 au fur et à mesure que m croît (figure 5.21, page ci-contre).

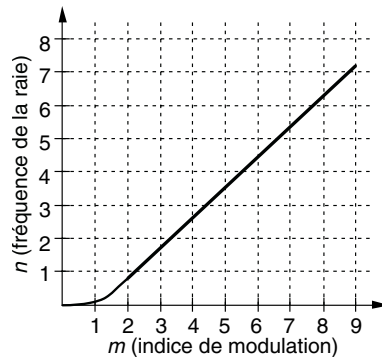


Figure 5.20. Position du maximum de la fonction de Bessel $J_n(m)$.

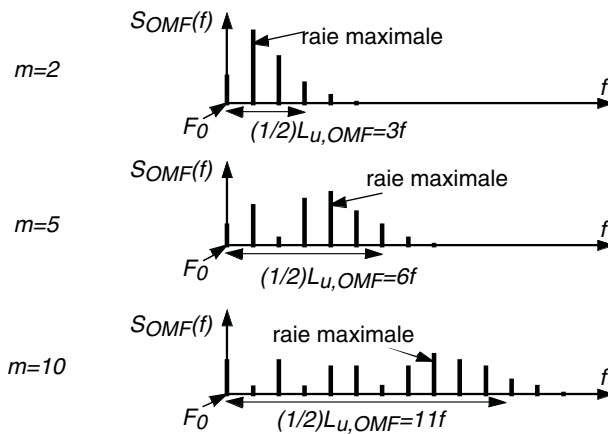


Figure 5.21. Variation du spectre d'une onde modulée en fréquence par un signal sinusoïdal en fonction de l'indice de modulation m .

Exemple. Les émissions radiophoniques en modulation de fréquence sont effectuées avec une fréquence de l'onde porteuse de l'ordre de 100 MHz (80 à 108 MHz) et un indice de modulation de 5. Ainsi pour des signaux modulateurs de largeur spectrale d'environ 15 kHz, le domaine fréquentiel occupé par une émission est de $2 \times (6 \times 15) = 2 \times 90 \text{ kHz} = 180 \text{ kHz}$ autour de la fréquence centrale. Donc deux émetteurs peuvent être séparés théoriquement par seulement 0,18 MHz, en réalité au moins 0,2 MHz. Ce résultat explique la possibilité pour les récepteurs de pouvoir sélectionner des émetteurs avec une progression de 0,1 MHz.

Pour ces mêmes émissions en modulation d'amplitude, la largeur de spectre aurait été de seulement 30 kHz au lieu de 180 kHz.

► Cas d'un indice de modulation très faible

Si l'on fait l'hypothèse de $m \ll 1$, les seules composantes spectrales significatives sont celles correspondant aux fréquences F_0 et à $F_0 \pm f$ car :

- fréquence : F_0 amplitude : $J_0(m) = 1$
- fréquence : $F_0 \pm f$ amplitude : $J_1(m) = m/2$
- fréquence : $F_0 \pm 2f$ amplitude : $J_2(m) = m^2 \approx 0$

Le spectre de l'OMF est alors identique à celui obtenu dans le cas de la modulation d'amplitude à la phase près.

► Puissances en modulation de fréquence

La puissance de l'onde porteuse s'exprime de la même façon que pour la modulation d'amplitude, soit :

$$P_{OP} \propto A^2/2$$

La puissance moyenne de l'onde modulée en fréquence s'obtient à partir de l'expression de $s_{OMF}(t)$ mise sous sa forme complexe :

$$s_{OMF}(t) = A \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \cdot e^{j(\Omega_0 + n\omega)t}$$

ou

$$s_{OMF}(t) = A \cdot e^{j\Omega_0 t} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \cdot e^{jn\omega t}$$

Les fonctions de Bessel sont de puissance bornée, soit :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [J_n(m)]^2 = 1$$

Donc, il vient :

$$P_{OMF} = P_{OP} \propto A^2/2$$

Contrairement à ce que nous avons obtenu pour la modulation d'amplitude, cette puissance est indépendante du signal modulant. Il est donc possible d'augmenter le signal informatif, c'est-à-dire l'indice de modulation sans augmenter la puissance transmise. Or l'augmentation de l'indice de modulation améliore de façon importante le rapport signal sur bruit, bien que l'on augmente aussi le bruit capté en élargissant le spectre à transmettre.

Ainsi l'amélioration de la modulation de fréquence par rapport à la modulation d'amplitude, exprimée en dB, est directement fonction de l'indice de modulation m selon les expressions données dans le tableau 5.5, page ci-contre.

► Préaccentuation et désaccentuation des signaux en modulation de fréquence

Le spectre de fréquence des signaux de parole et musique n'a pas une répartition constante des différentes composantes. Si la fréquence de 400 Hz est la référence, le niveau baisse et atteint -14 dB à 10 kHz (figure 5.22, page ci-contre).

TABLEAU 5.5. Amélioration du rapport signal/bruit (en dB) de la modulation de fréquence par rapport à la modulation d’amplitude.

Différents cas	Amélioration en dB
Amélioration propre pour $m = 1$	$\approx 5 \text{ dB}$
Amélioration due à l’indice de modulation m	$20 \log_{10}(m)$ (Ex : 14 dB pour $m = 5$)
Amélioration due à l’effet d’accentuation pour $\tau = 50 \mu\text{s}$ (voir remarque ci-après)	$\approx 10 \text{ dB}$ (Ex : 19 dB pour $m = 5$)
Total	$15 + 20 \log_{10}(m)$

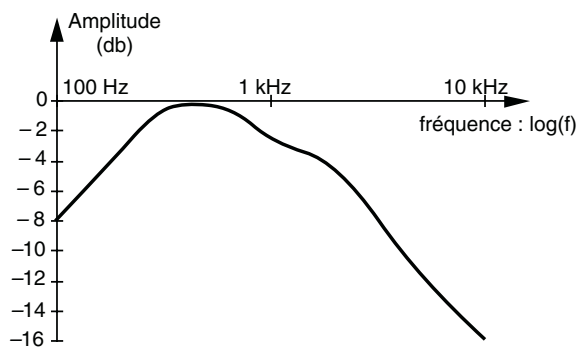


Figure 5.22. Répartition spectrale d’un signal audiofréquence (parole ou musique).

Il s’ensuit que le rapport signal/bruit diminue en hautes fréquences avec un niveau de bruit identique sur tout le spectre. Cette dégradation est encore plus importante en modulation de fréquence puisque la bande spectrale transmise est plus large.

Pour pallier ce problème, on réalise au niveau de l’émetteur une préaccentuation permettant d’augmenter les amplitudes des hautes fréquences du spectre. À la réception, on effectue bien évidemment l’opération inverse : la désaccentuation (figure 5.23).

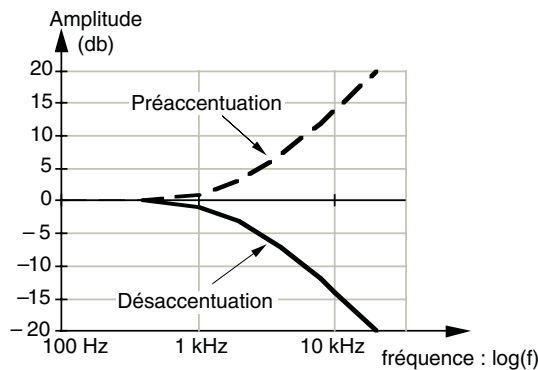


Figure 5.23. Courbes de préaccentuation et de désaccentuation utilisées pour éviter un rapport signal/bruit faible en hautes fréquences (pour $\tau = 50 \mu\text{s}$).

b) Cas général de l'OMF

► Expression de l'OMF pour un signal quelconque

Le signal $s(t)$ informatif peut se décomposer suivant la série de Fourier limitée au terme n (signal physique) :

$$s(t) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t)$$

L'expression de l'OMF sous sa forme complexe est donc :

$$s_{\text{OMF}}(t) = A \cdot e^{j \left[\Omega_0 t + \sum_{i=1}^n m_i \cdot \sin(\omega_i t) \right]} \quad \text{avec} \quad m_i = a_i \cdot \frac{\Delta \Omega}{\omega_i} = a_i \cdot \frac{\Delta F}{f_i}$$

D'où, en utilisant les fonctions de Bessel, l'expression générale est :

$$s_{\text{OMF}}(t) = A \cdot e^{j[\Omega_0 t]} \cdot \prod_{i=1}^n \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [J_k(m_i) \cdot a_i \cdot e^{jk\omega_i t}] \right]$$

► Expression de l'OMF pour un signal à deux composantes

Prenons l'exemple d'un signal avec uniquement deux composantes fréquentielles de pulsation ω_1 et ω_2 , nous avons l'expression du signal $s(t)$:

$$s(t) = a_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + a_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t)$$

D'où l'expression de l'OMF dans ce cas particulier :

$$s_{\text{OMF}}(t) = A \cdot e^{j[\Omega_0 t]} \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [J_k(m_1) \cdot a_1 \cdot e^{jk\omega_1 t}] \right] \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [J_k(m_2) \cdot a_2 \cdot e^{jk\omega_2 t}] \right]$$

Il est important de remarquer que cette fonction n'est pas linéaire et donc que le principe de superposition n'est pas applicable. Le signal modulé en fréquence par la somme de deux signaux sinusoïdaux n'est pas la somme des deux signaux modulés en fréquence par chacun de ces signaux. Le spectre va se composer de nombreuses raies dont les premières auront les amplitudes suivantes :

pulsation	amplitude
Ω_0	$A \cdot J_0(m_1) \cdot J_0(m_2)$
$\Omega_0 + \omega_1$	$A \cdot J_1(m_1) \cdot J_0(m_2)$
$\Omega_0 - \omega_1$	$-A \cdot J_1(m_1) \cdot J_0(m_2)$
$\Omega_0 + \omega_2$	$A \cdot J_0(m_1) \cdot J_1(m_2)$
$\Omega_0 - \omega_2$	$-A \cdot J_0(m_1) \cdot J_1(m_2)$

On peut remarquer que toutes les amplitudes des raies vont dépendre des indices de modulation m_1 et m_2 . Le spectre sera borné lorsque les deux quantités $J_k(m_1)$ et $J_p(m_2)$ ou leur produit deviendront négligeables. Si l'on cherche la largeur spectrale maximale, on peut faire le raisonnement suivant : si $\omega_1 < \omega_2$, alors $m_1 > m_2$. Donc la fonction $J_k(m_1)$ sera petite pour $n = 1 + m_1$. Cette condition implique que la fonction $J_p(m_2)$ soit aussi de faible valeur puisque si $n = 1 + m_1$ et $m_1 > m_2$, alors $n = 1 + m_1$. Ainsi la valeur n est définie par l'indice de modulation de la fréquence la plus petite, mais la largeur spectrale sera obtenue pour la fréquence la plus grande :

$$L_{\text{utile, OMF}} \approx 2 \cdot (1 + m_1) \cdot f_2 \quad \text{avec} \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \quad \text{et} \quad m_1 = \frac{\Delta\Omega}{\omega_1} = \frac{\Delta F}{f_1}$$

c) OMF pour un signal numérique à deux niveaux

Lorsque le signal $s(t)$ est un signal numérique, on associe une fréquence donnée à chacun de ses états (figure 5.18, page 100). Cette modulation peut être effectuée par autant d'oscillateurs qu'il y a d'états numériques et alors le signal modulé a une phase discontinue ou par un oscillateur commandé par tension (VCO : Voltage Controlled Oscillator) et alors le signal modulé a une phase continue (figure 5.24). Hors la discontinuité de phase qui a pour effet d'étaler le spectre du signal (introduction de transitions raides), on préfère donc en général la modulation de fréquence à continuité de phase du fait de la bande passante limitée des supports de transmission.

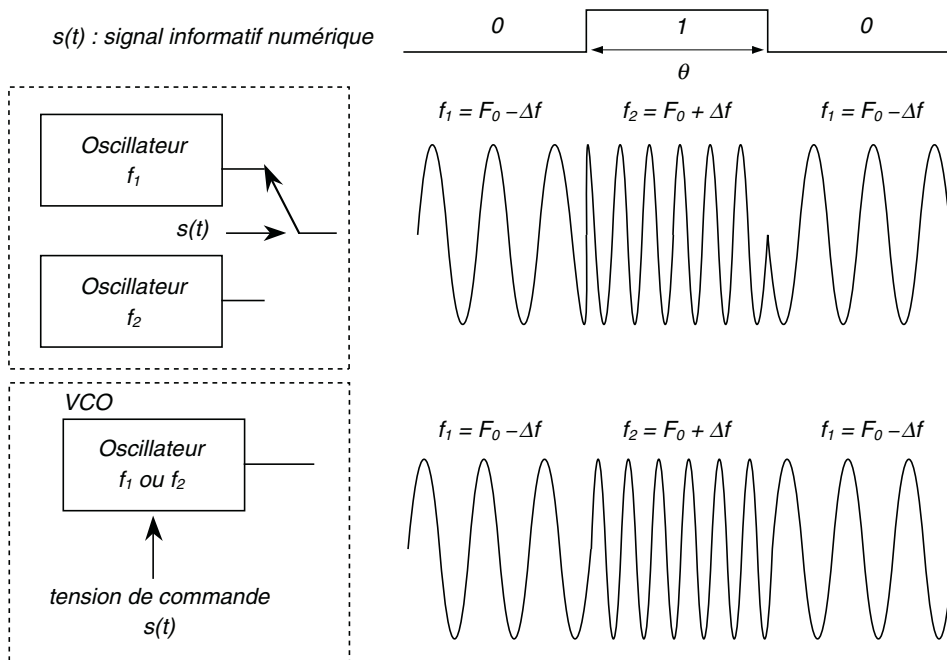


Figure 5.24. Modulation de fréquence sans cohérence de phase (utilisation de 2 oscillateurs) et avec cohérence de phase (utilisation d'un VCO).

Dans ce cas, en considérant θ la durée de base d'un bit b_i du signal numérique, l'expression de l'onde modulée en fréquence est :

$$s_{\text{OMF}}(t) = A \cdot \cos [2\pi (F_0 + \Delta f \cdot b_i) \cdot t + \varphi_i] \quad \text{pour } t \in [i\theta, (i+1)\theta]$$

et la fréquence instantanée $f_i(t)$ et l'indice de modulation m s'expriment par :

$$f_i(t) = F_0 + \Delta f \cdot b_i(t) \quad \text{avec } f_1 = F_0 - \Delta f \leq f_i(t) \leq f_2 = F_0 + \Delta f$$

et

$$m = \frac{2\pi \Delta f}{2\pi (1/2\theta)} = 2 \cdot \Delta f \cdot \theta$$

Le spectre de ce signal modulé en fréquence à continuité de phase est donné par l'expression suivante (figure 5.25) :

$$S_{\text{OMF}}(f) = \frac{2A^2 \Delta f}{(\pi\theta)^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi\theta(f - \Delta f)) \cdot \sin^2(\pi\theta(f + \Delta f))}{1 - \cos(2\pi\theta\Delta f) \cdot \cos(2\pi\theta f) + (f^2 - \Delta f^2) \cdot \cos^2(2\pi\theta\Delta f)}$$

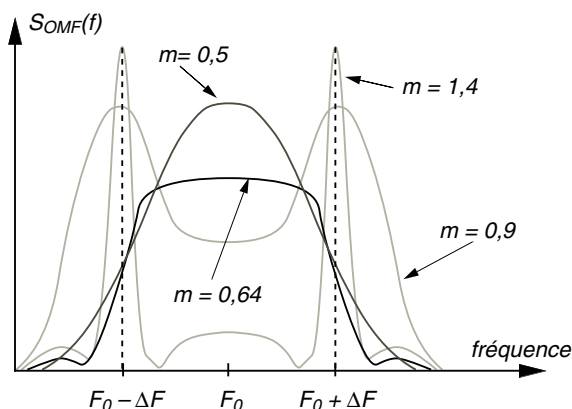


Figure 5.25. Spectre d'un signal numérique à deux niveaux modulé en fréquence.

Pour définir le meilleur indice de modulation, on peut chercher un compromis entre les deux caractéristiques suivantes :

- le coefficient de corrélation entre les deux états du signal permet de mesurer la probabilité d'erreur à la réception. Celle-ci est minimale pour $m = 0,715$;
- la largeur spectrale est définie comme la bande de fréquence rassemblant 95 % de la puissance, alors le spectre le plus étroit est obtenu pour un indice de $m = 0,64$.

Exemple. Soit l'exemple des systèmes de transmissions numériques (modems conformes à l'avis V23 du CCITT), qui utilisent une modulation de fréquence à deux valeurs fréquences : 1 300 Hz et 2 100 Hz (d'où $\Delta f = 400$ Hz et $F_0 = 1 700$ Hz).

La rapidité de modulation étant de 1 200 bit/s ($1/\theta$), l'indice de modulation est de $(800(1/1 200)) = 0,66$. Cet indice de modulation correspond en effet à un spectre le plus étroit possible autour de la fréquence porteuse (1 700 Hz).

d) Les méthodes de modulation

Les principales méthodes de modulation de fréquence sont au nombre de deux : le modulateur indirect de Armstrong et le modulateur direct.

► Modulateur indirect de Armstrong

Soient le signal modulant $s(t) = a \cdot \cos(\omega t)$ et le signal de l'onde porteuse $A \cdot \cos(\Omega t)$. À partir de la structure décrite schématiquement sur la figure 5.26, les signaux sont modifiés au fur et à mesure de la progression dans le modulateur. Après le circuit intégrateur de constante k_1 :

$$V_1 = \frac{a}{\omega} \cdot k_1 \cdot \sin(\omega t)$$

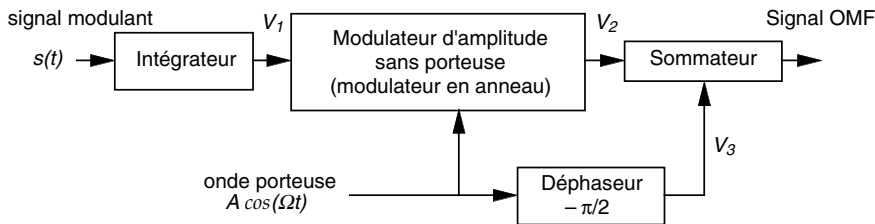


Figure 5.26. Structure schématique d'un modulateur de fréquence de type Armstrong.

Après le circuit de modulation d'amplitude sans porteuse de type modulateur en anneau ayant une constante k_2 :

$$V_2 = \frac{a}{\omega} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\Omega t)$$

Après le circuit sommateur, nous obtenons le signal modulé en fréquence de la forme :

$$s_{\text{OMF}}(t) = A \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \sin(\omega t) \right)^2 \right] \cdot \sin \left[\Omega t + \text{Arctan} \left(\frac{a}{\omega} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \sin(\omega t) \right) \right]$$

En fait ce signal ne correspond pas à la définition théorique d'un signal modulé en fréquence par $s(t) = a \cdot \cos(\omega t)$. En effet, il est d'une part modulé en amplitude et d'autre part la phase instantanée ne fait pas intervenir le terme directement proportionnel à l'intégrale du signal modulant. Mais en faisant d'une part l'hypothèse suivante :

$$\frac{a}{\omega} \cdot k_1 \cdot k_2 \ll 1$$

Et en réalisant d'autre part une limitation en amplitude du signal, il vient :

$$s_{\text{OMF}}(t) = A \cdot \sin \left[\Omega t + \frac{\Delta \Omega}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \right]$$

avec

$$\Delta\Omega = a \cdot k_1 \cdot k_2 \quad \text{et} \quad m = \frac{\Delta\Omega}{\omega} = \frac{a \cdot k_1 \cdot k_2}{\omega}$$

On obtient donc un signal OMF avec un indice de modulation très faible ($m \ll 1$). Pour éviter cet indice de modulation trop faible, on procède alors en fin de chaîne à une multiplication de fréquence par n :

$$s_{\text{OMF}}(t) = A \cdot \sin \left[n \cdot \left(\Omega t + \frac{\Delta\Omega}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \right) \right]$$

ou

$$s_{\text{OMF}}(t) = A \cdot \sin[\Omega' t + m' \cdot \sin(\omega t)] \quad \text{avec} \quad m' = m \cdot n$$

Il est intéressant de noter que le modulateur d'Armstrong sans le module d'intégration est un modulateur de phase.

► Modulateur direct

Une autre possibilité est de modifier, au rythme du signal basse fréquence, la fréquence de fonctionnement d'un oscillateur. Cette dernière est en général définie par la valeur d'une capacité. La méthode de loin la plus répandue consiste à utiliser une *diode à capacité variable* ou varicap. En effet une jonction P-N polarisée en sens inverse se comporte comme une capacité dont la valeur est inversement proportionnelle à la racine carrée de la tension :

$$C = C_0 \cdot \left(1 / \sqrt{\frac{V}{V_0} - 1} \right)$$

Pour obtenir une OMF classique, il faut avoir $\Delta C/C_0 \ll 1$. De plus l'expression du signal modulé montre aussi une modulation d'amplitude résiduelle. On obtient une relation directe entre les variations de la capacité et l'excursion de pulsation $\Delta\Omega$:

$$\Delta\Omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta C}{C_0} \cdot \Omega$$

e) Détection d'une onde modulée en fréquence

Après un amplificateur HF, un récepteur complet pour une onde modulée en fréquence se compose en premier lieu d'un système de changement de fréquence et ensuite d'un démodulateur en fréquence.

► Récepteur pour modulation de fréquence

Le système de changement de fréquence est constitué principalement d'un mélangeur ou d'un multiplieur. Sur les entrées de ce circuit mélangeur sont envoyés le signal de l'onde modulée en fréquence $s_{\text{OMF}}(t)$ et le signal $s_{\text{OL}}(t)$ en provenance d'un oscillateur local, accordé par l'utilisateur du récepteur (figure 5.27, page ci-contre) :

$$s_{\text{OMF}}(t) = A \cdot \cos[\Omega t + m \cdot \sin(\omega t)] \quad \text{et} \quad s_{\text{OL}}(t) = A_L \cdot \cos[\Omega_L t]$$

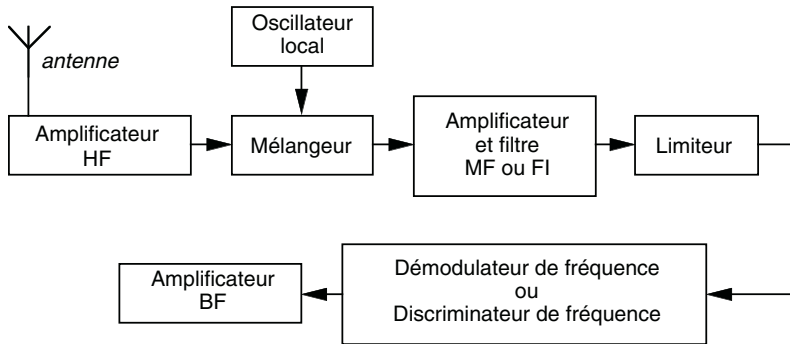


Figure 5.27. Schéma d'ensemble d'un récepteur pour modulation de fréquence.

Le signal de sortie du mélangeur est donc constitué de deux signaux centrés sur $\Omega - \Omega_L$ et $\Omega + \Omega_L$ (respectivement bandes latérales inférieure et supérieure) :

$$s_{\text{mélangeur}}(t) = kA_L A \cdot \left\{ \cos[(\Omega - \Omega_L)t + m \cdot \sin(\omega t)] + \cos[(\Omega + \Omega_L)t + m \cdot \sin(\omega t)] \right\}$$

Un filtre de moyenne fréquence ou encore fréquence de intermédiaire $F_I = \Omega_I/2\pi$ permet de sélectionner la bande latérale inférieure uniquement. Le signal, résultat de ce changement de fréquence, est donc :

$$s_{FI}(t) = k \cdot A_L \cdot A \cdot \cos[\Omega_I t + m \sin(\omega t)] \quad \text{avec} \quad \Omega_I = \Omega - \Omega_L$$

Le système d'accord est organisé de telle sorte que cette fréquence intermédiaire soit indépendante de la fréquence d'émission. Ceci permet d'ajuster définitivement tous les paramètres de l'amplificateur intermédiaire et du démodulateur de fréquence. Par exemple, dans le cas de la radiodiffusion en modulation de fréquence, cette fréquence intermédiaire a été fixée par convention à 10,7 MHz.

Cet amplificateur est en général suivi d'un limiteur d'amplitude. En effet, les variations d'amplitude, qui ne transportent aucune information, ne pourraient contribuer qu'à perturber la phase suivante : la démodulation de fréquence.

Le circuit « démodulateur de fréquence ou discriminateur de fréquence » doit fournir un signal proportionnel à la déviation de fréquence du signal $s_{FI}(t)$ par rapport à la fréquence intermédiaire F_I .

► Démodulateur de fréquence

Parmi les nombreux systèmes plus ou moins complexes et performants de démodulation de fréquence qui existent, nous n'étudierons les principes que de quelques-uns.

Transformation en modulation d'amplitude

Ce système utilise un circuit résonnant du type RLC, accordé sur une fréquence f_0 . Nous savons que si une tension d'amplitude constante et de fréquence f est appliquée à un tel circuit, la tension de sortie a une amplitude fonction de la position relative de f_0 et f (figure 5.28, page suivante). Selon le coefficient de surtension du circuit résonnant, une faible variation Δf de f se traduit par une variation proportionnelle de l'amplitude.

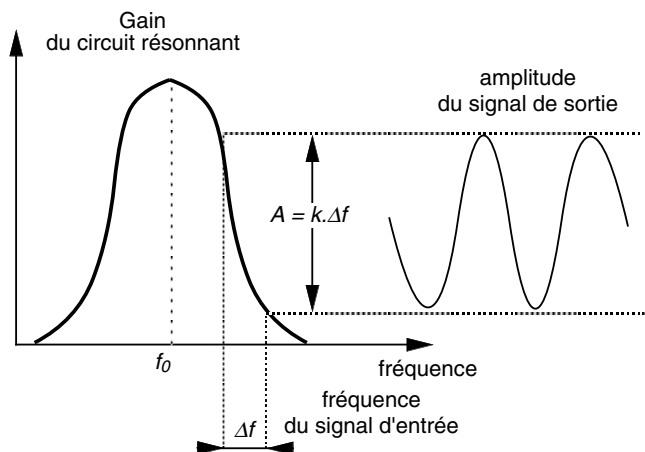


Figure 5.28. Principe d'utilisation d'un circuit résonnant pour la démodulation de fréquence.

Le manque de linéarité de ce circuit a été fortement amélioré en utilisant deux circuits oscillants accordés sur deux fréquences différentes de part et d'autre de f (dans notre cas F_I). Ce système, permettant de plus une excursion de fréquence plus grande, est appelé « discriminateur à circuit antirésonnant symétrique à accord décalé » ou « discriminateur de Travis ».

Discriminateurs à déphasage ou à variation de phase

Le principe de ces circuits utilise le fait que si les enroulements primaire et secondaire d'un transformateur sont accordés et fortement couplés, les tensions sont en quadrature à la résonance et leur déphasage varie presque linéairement autour de cette fréquence de résonance.

Donc pour des circuits accordés sur la fréquence f_0 , les tensions V_1 (tension d'entrée à la fréquence intermédiaire) et V_2 (tension de sortie) aux bornes des circuits sont liées par la relation :

$$V_2 = k \cdot V_1 \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} + \varphi)} \quad \text{avec } \varphi \propto (f_I - f_0)$$

À partir d'un circuit électronique, on réalise la composition de ces deux tensions de manière à disposer des deux tensions V_3 et V_4 (figure 5.29, page ci-contre).

Il est facile de démontrer que, en supposant $f \ll 1$, ces deux tensions sont de la forme :

$$V_3 \propto V_1 \cdot [1 + \alpha \cdot \varphi + \dots]$$

et

$$V_4 \propto V_1 \cdot [1 - \alpha \cdot \varphi + \dots]$$

À partir de ce résultat, différents schémas exploitent soit la différence de ces tensions soit leur rapport (démodulateur de rapport ou de Foster-Seeley) pour obtenir une tension proportionnelle à $f_I - f_0$.

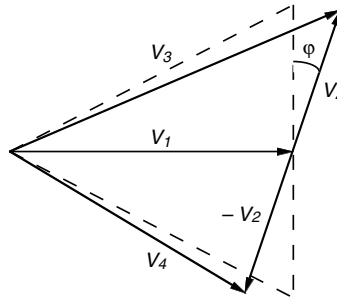


Figure 5.29. Composition des tensions dans le cas de discriminateurs à déphasage.

Démodulateur de fréquence par comptage

Les circuits précédents fournissent une tension proportionnelle à un écart de fréquence pour des faibles variations de fréquence. La détection par comptage permet au contraire de couvrir une plage de fréquence très grande.

Le principe de ce démodulateur, décrit sur la figure 5.30, consiste en un premier temps à réaliser une transformation du signal d'entrée en créneaux par écrêtage ou par comparateur. Le signal carré ainsi obtenu, de fréquence identique au signal initial, est différencié afin d'obtenir des impulsions qui sont mises en forme par un monostable. Ainsi, le signal obtenu est une suite d'impulsions de largeur et d'amplitude fixe dont la périodicité est celle du signal d'entrée. Sa valeur moyenne est donc rigoureusement proportionnelle à la fréquence de ce dernier.

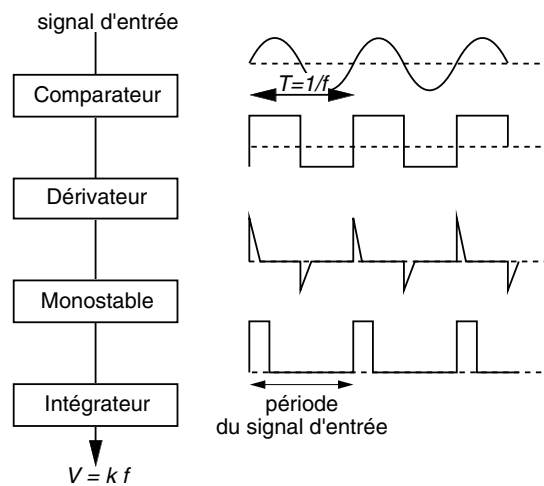


Figure 5.30. Détection par comptage.

Détection d'une onde modulée en fréquence par une boucle d'asservissement de phase

Une boucle d'asservissement ou verrouillage de phase (PLL : phase lock loop) est un circuit composé essentiellement de deux parties (figure 5.31, page suivante) :

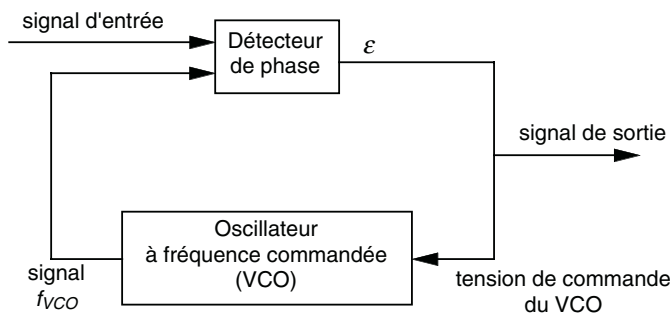


Figure 5.31. Détection par boucle à verrouillage de phase.

- un oscillateur à fréquence commandée (VCO : voltage controlled oscillator) qui fournit un signal de fréquence f_{VCO} proportionnelle à une tension d'entrée V_{VCO} ;
- le deuxième élément est un circuit comparateur de phase qui fournit un signal ϵ qui est fonction du déphasage entre les signaux, supposés sinusoïdaux et de même fréquence, appliqués à ses deux entrées.

Dans notre cas le signal d'entrée du détecteur de phase est le signal modulé en fréquence (signal à F_I) et la sortie de ce circuit fournit un signal proportionnel à la variation de fréquence : résultat recherché. La boucle à asservissement de phase est donc un démodulateur de fréquence idéal, la seule condition à satisfaire est que la vitesse de variation de la fréquence soit inférieure à la fréquence de coupure de la boucle. De plus deux paramètres caractérisent ces circuits :

- la zone d'accrochage : plage de fréquence dans laquelle la fréquence du signal d'entrée doit se trouver ;
- la zone de poursuite : plage de fréquence dans laquelle le VCO peut suivre les variations de fréquence.

5.3.3 La modulation de phase

La modulation en phase d'une porteuse par un signal BF est équivalente à une modulation de fréquence par la dérivée du signal informatif (tableau 5.2, page 99 et 5.3, page 100). Par conséquent, tout ce qui a été développé pour la modulation de fréquence s'applique. Cette modulation est la plus employée pour la transmission des signaux numériques. En effet elle réalise un bon compromis puissance-efficacité spectrale, c'est dire le meilleur « nombre de bits par seconde et par hertz de bande passante ». Cette notion a déjà été évoquée dans la modulation d'amplitude à deux porteuses en quadrature (paragraphe 5.2.2).

a) Modulation de phase pour la transmission de signaux numériques

Pour minimiser la probabilité d'erreur, les différents états de la phase sont régulièrement répartis sur l'intervalle disponible $[0, 2\pi]$. Pour des raisons techniques de démodulation avec une probabilité d'erreur acceptable, on ne dépasse pas 8 valeurs de phase.

Dans le cas d'un signal codé binaire, la modulation à deux phases s'écrit :

$$s_{OMP}(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t + \varphi_i)$$

avec $\varphi_i = \pm\pi$ (selon que la donnée est égale à 0 ou 1).

La densité spectrale $S_{ss}(f)$ de la tension de l'onde modulée en phase $s_{OMP}(t)$ dépend de la durée d'un bit égale au temps θ :

– modulation cohérente ($F_0 = k/\theta$) :

$$S_{ss}(f) = \frac{A^2}{\theta} \cdot \frac{\sin^2(\pi\theta f)}{\pi^2 \cdot (f^2 - F_0^2)^2} \cdot f^2$$

– modulation non cohérente ($F_0 \neq k/\theta$) :

$$S_{ss}(f) = \frac{A^2}{\theta} \cdot \left[\frac{\sin^2(\pi\theta(f - F_0))}{\pi^2 \cdot (f - F_0)^2} + \frac{\sin^2(\pi\theta(f + F_0))}{\pi^2 \cdot (f + F_0)^2} \right]$$

si $F_0 \ll 1/\theta$ (k très grand), les deux expressions sont quasiment identiques et le spectre est centré autour de F_0 . Pour augmenter le débit binaire en conservant la fréquence de modulation ($1/\theta$), il suffit d'augmenter le nombre d'états de phase (figure 5.32).

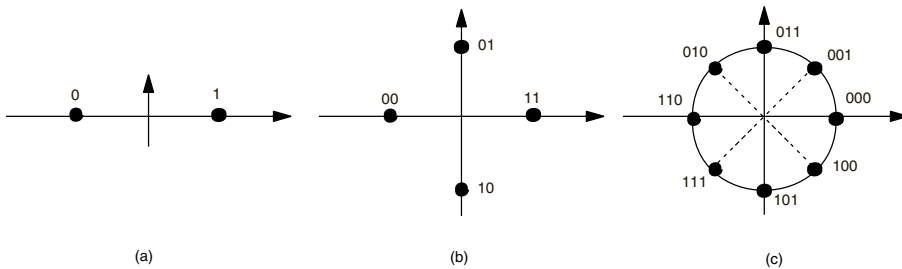


Figure 5.32. Représentation vectorielle d'un signal modulé en phase à deux valeurs (a), à quatre valeurs (b) et à huit valeurs (c). Dans le dernier cas on utilise un code tel qu'un seul élément binaire change lorsque l'on passe d'un état de phase au plus proche voisin (code de Gray).

b) Démodulation des signaux modulés en phase pour la transmission de signaux numériques

La réception et la démodulation des signaux modulés en phase peuvent se réaliser avec deux types de démodulateurs : démodulateur cohérent et démodulateur différentiel.

► Démodulateur cohérent

Le principe de ce récepteur est l'utilisation d'un oscillateur local synchronisé sur la fréquence de la porteuse F_0 . Le signal reçu est multiplié par le signal de l'oscillateur local déphasé des mêmes états utilisés à la modulation ; la sortie de ces circuits multiplieurs est soumise à un filtrage passe-bas qui indique s'il y a identité entre le signal reçu et l'un des signaux du récepteur (figure 5.33, page suivante).

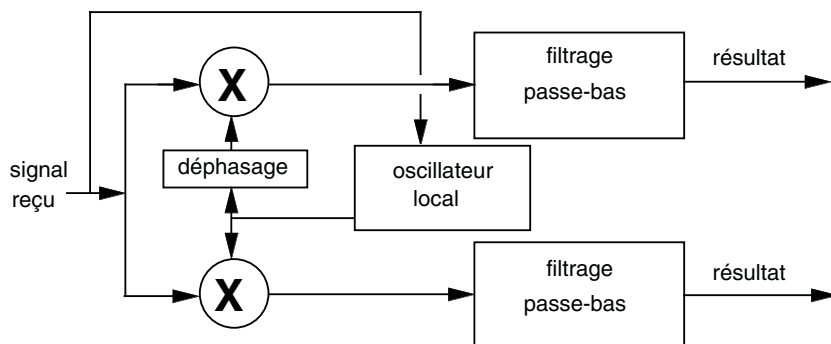


Figure 5.33. Démodulateur cohérent pour modulation de phase à deux valeurs.

► Démodulateur différentiel

Cette démodulation consiste à multiplier le signal reçu par le signal reçu précédent (retard de T). La phase du signal reçu étant φ_i et celle du signal retardé φ_{i-1} , un filtrage passe-bas de la sortie permet d'obtenir un signal proportionnel à $\cos(\varphi_i - \varphi_{i-1})$ et de déterminer le saut de phase 0 ou π .

c) Modulations combinées d'amplitude et de phase

Au lieu de faire correspondre les différents états du signal numérique à l'un des paramètres caractéristiques de l'onde porteuse (amplitude, fréquence ou phase), on peut utiliser à la fois deux paramètres. C'est l'association simultanée « amplitude A_i et phase φ_i » qui a été retenue. Le signal modulé est le suivant :

$$s_{OMP}(t) = A_i \cdot \cos(2\pi F_0 t + \varphi_i) \quad \text{pour } t \in [i\theta, (i+1)\theta]$$

Un cas particulier que nous avons déjà abordé est la modulation d'amplitude à deux porteuses en quadrature (MAQ). Dans le diagramme spatial représentatif de la modulation, chaque état du signal numérique est représenté par un point $M(X_i, \varphi_i)$. Si

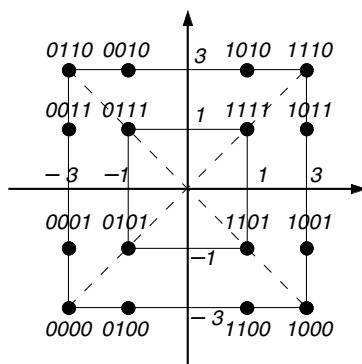


Figure 5.34. Diagramme spatial de la modulation d'amplitude à deux porteuses en quadrature avec 16 états.

nous considérons 16 états (quatre valeurs d'amplitude : 2 codées avec A_i et 2 codées avec B_i), le signal modulé s'écrit (figure 5.34, page ci-contre) :

$$s_{\text{OMF}}(t) = A_i \cdot \cos [2\pi F_0 t + \varphi] + B_i \cdot \sin [2\pi F_0 t + \varphi]$$

avec $A_i = \pm 1, \pm 3$ et $B_i = \pm 1, \pm 3$

Nous pouvons remarquer que comme précédemment, on utilise un codage de type code de Gray.

Pour la modulation correspondant à l'avis V29 du CCITT des transmissions de données unidirectionnelles avec un débit de 9 600 bits/s, on utilise une modulation à quatre phases avec deux niveaux (figure 5.35).

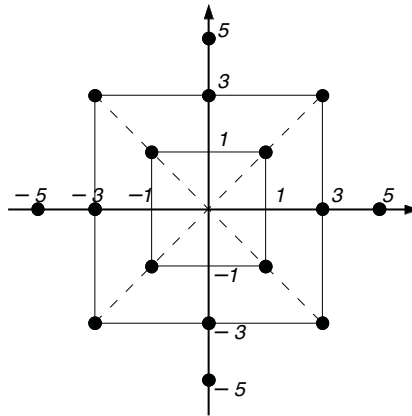


Figure 5.35. Diagramme spatial de la modulation MAQ à quatre phases et deux amplitudes (Avis V29 du CCITT).

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 5.1 (Réalisation de la modulation d'amplitude)

Le but de cet exemple est de montrer par simulation les différentes étapes de la modulation. On considère le montage constitué d'un premier générateur (signal informatif modulant), délivrant une tension sinusoïdale basse fréquence BF $e = E \cdot \cos(\omega t)$, monté en série avec un deuxième générateur (signal de l'onde porteuse), fournissant une tension sinusoïdale haute fréquence HF $u = U \cdot \cos(\Omega t)$, une diode D et une résistance R (figure 5.36, page suivante). On suppose que $E \leq U$ et $\omega \ll \Omega$. La visualisation des différents signaux au cours du processus de modulation est obtenue pour des paramètres de la simulation qui sont les suivants :

- fréquence du signal modulant $e : f(\omega/2\pi) = 1\,000 \text{ Hz}$;
- nombre de périodes du signal e visualisé : $n = 8$;

- fréquence de l'onde porteuse u : $F(\Omega/2\pi) = 10\,000\text{ Hz}$;
- nombre de points de visualisation (discretisation) $n = 1\,024$.

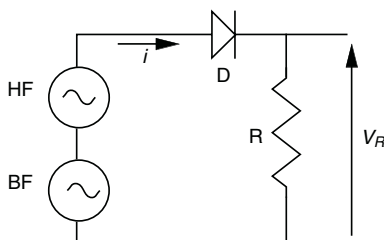


Figure 5.36. Représentation schématique du montage électronique permettant de réaliser une modulation d'amplitude.

Solution

Cette simulation a été réalisée à partir du logiciel d'instrumentation LabVIEW™ (annexe H). Ainsi nous avons le signal BF e représenté sur la figure 5.37a et le signal HF u représenté sur la figure 5.37b.

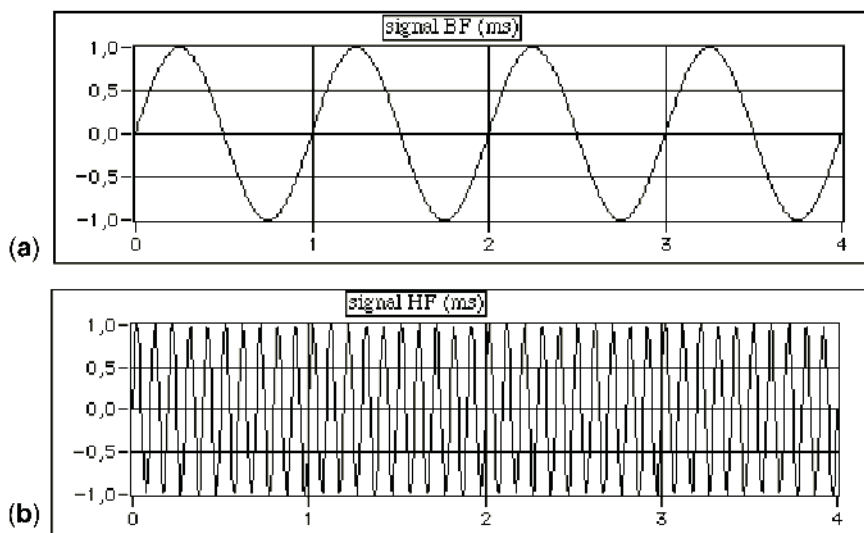


Figure 5.37. Représentation du signal BF modulant (a) et du signal HF de l'onde porteuse (b).

Si la diode D est remplacée par un court-circuit, le signal aux bornes de la résistance R est la somme des deux signaux BF et HF dont le spectre est l'association des deux raies spectrales respectivement à 1 kHz et à 10 kHz (figure 5.38a, page ci-contre) :

$$v_R(t) = E \cdot \cos(\omega t) + U \cdot \cos(\Omega t)$$

Le spectre unilatéral s'écrit sous la forme (figure 5.38b) :

$$V_R(f) = E \cdot \delta(f - \omega/2\pi) + U \cdot \delta(f - \Omega/2\pi)$$

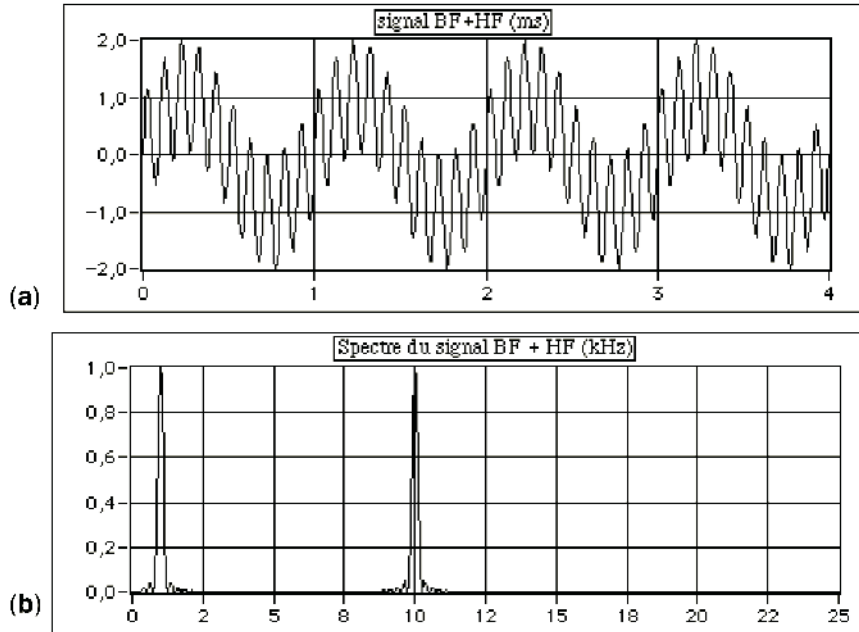


Figure 5.38. Représentation du signal BF + HF (a), et de son spectre (b), obtenu aux bornes de la résistance en court-circuitant la diode (figure 5.36, page ci-contre).

La représentation du spectre $V_R(f)$ n'est pas composée de raies infiniment étroites, comme le présente l'équation théorique précédente, mais de deux raies de largeur spectrale non nulle. Cette différence provient de l'effet de fenêtrage temporel ou effet de limitation d'observation du signal, qui sera étudié dans la suite de cet ouvrage.

La diode D étant maintenant insérée dans le circuit, le signal $v_R(t)$ est composé que de la partie positive du signal précédent (figure 5.39, page suivante). On suppose que la caractéristique de l'ensemble diode D et résistance R peut être représentée par la relation :

$$i(t) = a_0 + a_1 \cdot v(t) + a_2 \cdot v^2(t)$$

À partir de cette caractéristique, nous pouvons calculer la tension ou le courant $i_R(t)$ dans la résistance R et son spectre :

$$\begin{aligned} i_R(t) &= a_0 + a_1 \cdot [E \cdot \cos(\omega t) + U \cdot \cos(\Omega t)] + a_2 \cdot [E \cdot \cos(\omega t) + U \cdot \cos(\Omega t)]^2 \\ i_R(t) &= a_0 + a_1 E \cos(\omega t) + a_1 U \cos(\Omega t) + a_2 E^2 \cos^2(\omega t) + a_2 U^2 \cos^2(\Omega t) \\ &\quad + 2a_2 U E \cos(\Omega t) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

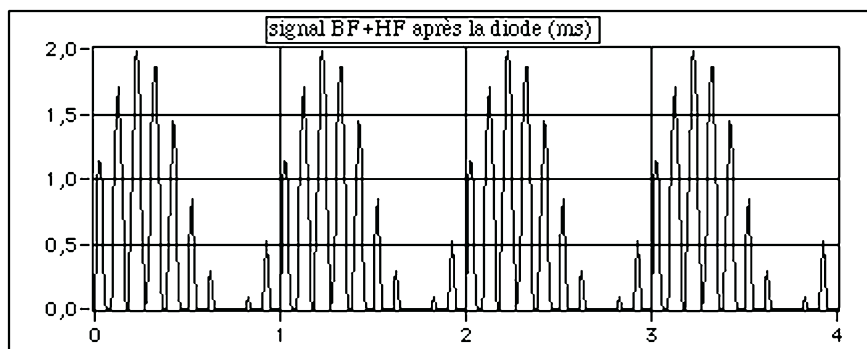


Figure 5.39. Représentation du signal BF + HF obtenu aux bornes de la résistance en insérant la diode dans le circuit.

$$\begin{aligned}
 i_R(t) &= a_0 + a_1 E \cos(\omega t) + a_1 U \cos(\Omega t) + \frac{a_2 E^2}{2} [1 + \cos(2\omega t)] \\
 &\quad + \frac{a_2 U^2}{2} [1 + \cos(2\Omega t)] + a_2 UE [\cos((\Omega + \omega)t) + \cos((\Omega - \omega)t)] \\
 i_R(t) &= a_0 + \frac{a_2(E^2 + U^2)}{2} + a_1 E \cos(\omega t) + \frac{a_2 E^2}{2} \cos(2\omega t) + a_2 UE \cos((\Omega - \omega)t) \\
 &\quad + a_1 U \cos(\Omega t) + a_2 UE \cos((\Omega + \omega)t) + \frac{a_2 U^2}{2} [1 + \cos(2\Omega t)]
 \end{aligned}$$

Le spectre du signal $i_R(t)$ possède donc 7 composantes correspondant aux fréquences suivantes : 0, ω , 2ω , $\Omega - \omega$, Ω , $\Omega + \omega$, 2Ω . La représentation spectrale, présentée sur la figure 5.40, montre ces différentes composantes fréquentielles plus d'autres liées au fait que la caractéristique réelle n'est pas limitée au terme en v^2 . On peut ainsi observer des composantes aux fréquences $\Omega - 2\omega$, Ω , $\Omega + 2\omega$, $2\Omega - \omega$, $2\Omega + \omega$.

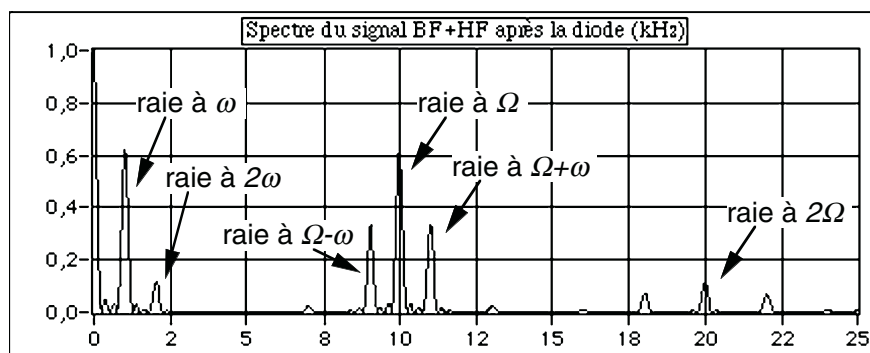


Figure 5.40. Représentation du spectre de signal BF + HF obtenu aux bornes de la résistance en insérant la diode dans le circuit.

Après amplification, on fait passer la tension $v_R(t)$ à travers un filtre passe bande centré sur la fréquence de l'onde porteuse Ω . Le filtre doit avoir une bande passante suffisante pour

ne pas modifier les composantes correspondant à la modulation d'amplitude, c'est-à-dire $\Omega - \omega$, Ω , $\Omega + \omega$. Par contre ce filtre doit atténuer le plus fortement possible toutes les autres composantes du spectre.

Le filtre choisi est un filtre passe-bande de type Butterworth d'ordre 2 ayant pour fréquence de coupure basse 8,5 kHz et pour fréquence de coupure haute 11,5 kHz (figure 5.41). La pente d'amortissement de ce filtre en dehors de sa bande passante est de -40 dB/décade.

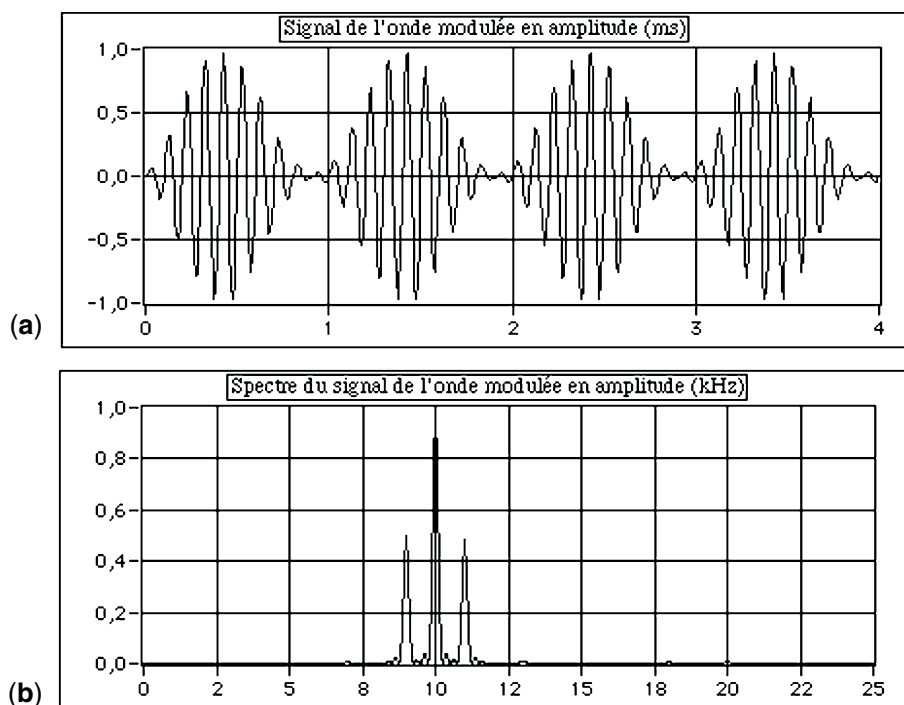


Figure 5.41. Représentation de l'onde modulée en amplitude (a) et de son spectre (b).

Les signaux obtenus par simulation du montage électronique correspondent bien aux signaux théoriques étudiés dans les paragraphes précédents.

Exercice 5.2 (Étude d'une modulation avec sous-porteuse)

Dans certaines applications où le signal informatif à transmettre est complexe formé de plusieurs parties indépendantes (image et son, son stéréophonique, etc.), il est possible d'utiliser deux fois successivement le principe de la modulation, appelée modulation primaire et modulation secondaire. Pour concrétiser cette méthodologie, nous allons considérer l'exemple applicatif des émissions radiophoniques stéréophoniques FM.

La radiodiffusion stéréophonique doit transmettre les signaux $g(t)$ et $d(t)$ correspondant aux deux voies (gauche et droite). Chacun de ces signaux a une largeur spectrale identique permettant d'assurer une très grande qualité

sonore : 15 Hz à 15 kHz. On supposera que l'amplitude du spectre est constante et égale à 1 sur toute cette largeur spectrale. Pour permettre une utilisation de ces émissions par des récepteurs monophoniques, les deux signaux émis sont en réalité le signal $m(t)$, qui est utilisé par les récepteurs monophoniques, et le signal $s(t)$ tels que :

$$m(t) = g(t) + d(t)$$

$$s(t) = g(t) - d(t)$$

Quelle est la largeur spectrale des signaux $m(t)$ et $s(t)$? Donner les relations permettant la reconstitution des signaux $g(t)$ et $d(t)$ à partir des signaux $m(t)$ et $s(t)$ pour les récepteurs stéréophoniques ?

Pour transmettre les deux signaux m et s sur le même canal de transmission (même onde porteuse finale), le signal $s(t)$ est utilisé pour moduler en amplitude une onde, dite sous-porteuse, de fréquence 38 kHz et d'amplitude égale à 1. Cette modulation d'amplitude est une modulation d'amplitude sans porteuse avec un indice de modulation égal à 1 (MA/SP). Un signal, appelé $r(t)$, est formé de la somme du signal $m(t)$, de la sous-porteuse modulée par le signal $s(t)$ et d'un signal sinusoïdal pur de fréquence 19 kHz et d'amplitude 1.

Tracer le spectre du signal complet $r(t)$ et donner sa largeur spectrale. Comment peut-on réduire la largeur spectrale occupée par ce signal en modifiant la modulation ? Dans ce cas, donner la largeur spectrale occupée.

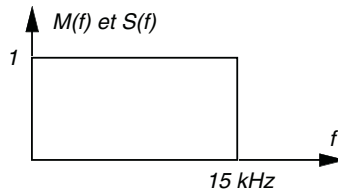
Pour permettre la transmission hertzienne du signal $r(t)$, précédemment défini, il est utilisé pour moduler en fréquence une porteuse de fréquence 100 MHz. L'indice de modulation est pris égal à 5.

Tracer schématiquement le spectre du signal transmis et donner la largeur spectrale occupée par ce signal. Sachant que la gamme de fréquence allouée à ce type de radiodiffusion s'étend de 85 MHz à 106 MHz et qu'un intervalle fréquentiel de protection de 400 kHz est imposé entre les zones spectrales occupées par les émetteurs, combien d'émetteurs différents peut-on mettre dans cette gamme de fréquence ? Donner les raisons de la transmission du signal sinusoïdal pur de 19 kHz.

Solution

Les signaux $m(t)$ et $s(t)$ étant formés à partir de la somme des signaux $g(t)$ et $d(t)$, ils possèdent la même largeur spectrale. Le spectre d'une somme de signaux est égal à la somme des spectres des différents signaux. La figure 5.42, page ci-contre représente schématiquement ces spectres $M(f)$ et $S(f)$ des signaux $m(t)$ et $s(t)$ en supposant un spectre intégré sur le temps et normalisé à 1 (analyse fréquentielle des émissions radiophoniques sur un temps long). La largeur spectrale utilisée sera supposée égale à 15 kHz. À la réception, la reconstitution des signaux $g(t)$ et $d(t)$ à partir des signaux $m(t)$ et $s(t)$ est très simple :

$$g(t) = \frac{m(t) + s(t)}{2} \quad \text{et} \quad d(t) = \frac{m(t) - s(t)}{2}$$

Figure 5.42. Spectres des signaux $m(t)$ et $s(t)$.

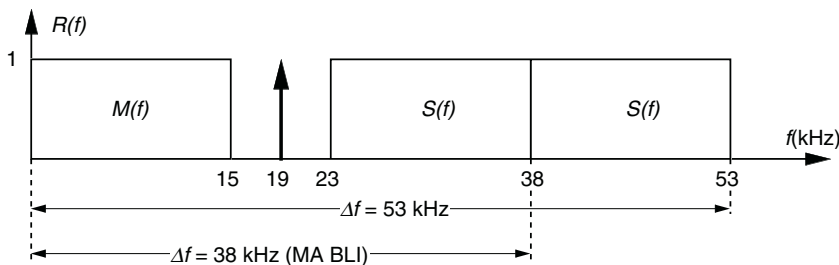
Un signal $r(t)$ est formé de la somme du signal $m(t)$, de la sous-porteuse modulée par le signal $s(t)$ avec une onde porteuse de fréquence F_p ($F_p = 38$ kHz) et d'un signal sinusoïdal pur de fréquence F_0 ($F_0 = 19$ kHz) et d'amplitude 1. Le signal $r(t)$ peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante :

$$r(t) = m(t) + OMA(F_p, s(t)) + \sin(2\pi F_0 t)$$

Dans une représentation fréquentielle unilatérale, le spectre $R(f)$ de ce signal s'exprime par :

$$R(f) = M(f) + S_{OMA}(F_p, s(t)) + \delta(f - F_0)$$

Le spectre, représenté sur la figure 5.43, permet de déterminer une largeur spectrale de 53 kHz. La modulation d'amplitude étant sans porteuse, il n'apparaît pas de raie à 38 kHz. Cette largeur spectrale pourrait être réduite si, au lieu d'utiliser une modulation d'amplitude complète, il avait été considéré une modulation à bande latérale unique (bande latérale inférieure). Dans ce cas la largeur spectrale aurait été d'environ 38 kHz.

Figure 5.43. Spectre du signal $r(t)$.

Pour permettre la transmission hertzienne du signal $r(t)$, précédemment défini, il est utilisé pour moduler en fréquence une porteuse de fréquence $F_p = 100$ MHz. L'indice de modulation est pris égal à 5. Nous avons donc une largeur spectrale ou largeur utile d'émission qui est donnée par la relation approchée de Carson (paragraphe 5.3.2) :

$$L_{\text{utile, OMF}} \approx 2 \cdot [1 + \text{« indice_modulation »}] \cdot f_{\text{max}}$$

$$L_{\text{utile, OMF}} \approx 2 \cdot [1 + 5] \cdot 53 \text{ kHz} = 636 \text{ kHz}$$

La gamme de fréquence allouée à ce type de radiodiffusion s'étend de 88 MHz à 108 MHz. De plus un intervalle fréquentiel de protection de 400 kHz est imposé entre les zones spectrales occupées par les émetteurs. La figure 5.44, page suivante, représente ce spectre de l'OMF. Donc l'occupation d'un émetteur doit être considérée comme étant :

$$L_{\text{utile, OMF}} = 636 + 400 = 1\,036 \text{ kHz} \approx 1 \text{ MHz}$$

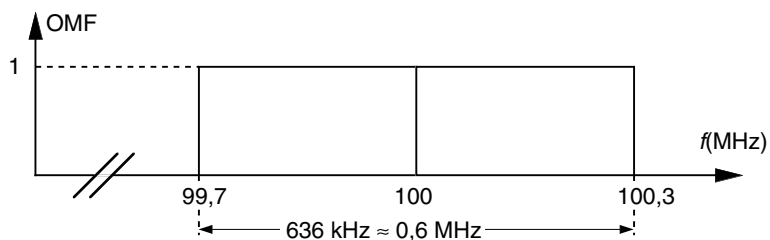


Figure 5.44. Spectre de l'onde modulé en fréquence.

Par conséquent le nombre d'émetteurs dans la gamme allouée peut être de 20.

Enfin l'onde sinusoïdale pure à 19 kHz a été émise afin de permettre au récepteur une démodulation plus aisée. En effet, étant donné que la modulation d'amplitude a été réalisée sans porteuse, il est nécessaire de recréer cette fréquence de 38 kHz pour démoduler le signal. Cette fréquence est alors produite à partir du signal à 19 kHz.

Chapitre 6

Signaux aléatoires. Bruit

6.1 SIGNAUX ALÉATOIRES

6.1.1 Définitions

Un signal est dit *aléatoire* si ses valeurs ou réalisations dépendent du hasard et s'il ne possède pas de représentation analytique. Par contre l'observation de ce signal peut être caractérisée par des grandeurs statistiques ou fréquentielles. Le signal aléatoire ou variable aléatoire évoluant en fonction du temps (donnée continue), nous nous plaçons dans le domaine des variables aléatoires continues (infinité de valeurs déterminée par le résultat de chaque expérience ou épreuve).

Considérons un ensemble n d'expérimentations ou d'épreuves ou encore d'enregistrements liés à un même phénomène physique. À chacune de ces épreuves, indicées par i , est associée une fonction $s(t)$ qui représente une réalisation du signal aléatoire ou une trajectoire du *processus aléatoire*, modèle mathématique du signal aléatoire (figure 6.1, page suivante). Pour t_0 fixé, l'ensemble des valeurs $s_i(t_0)$ représente les valeurs du signal aléatoire $s(t_0)$.

S'il est impossible de prévoir à l'avance la valeur $s_i(t_0)$ ou s_i de la variable aléatoire s que l'on va obtenir, on peut définir la *densité de probabilité* ou la fonction de distribution $p(s)$ avec les propriétés suivantes :

$$p(s) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(s) \cdot ds = 1$$

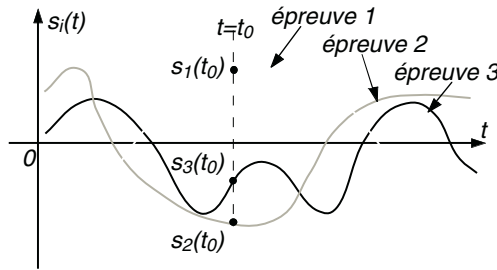


Figure 6.1. Réalisations d'un signal aléatoire provenant de plusieurs épreuves.

Ainsi la probabilité d'avoir la variable s comprise dans l'intervalle $[s_i, s_j]$ est :

$$P_{i,j} = \text{Prob} \{s \in [s_i, s_j]\} = \int_{s_i}^{s_j} p(s) \cdot ds$$

Un processus aléatoire, décrivant un signal aléatoire est dit *stationnaire* si les propriétés statistiques (moyenne, écart type, etc.) sont indépendantes du choix de l'origine du temps.

Il est plus aisé d'obtenir une expérimentation d'un processus sur un temps long que plusieurs épreuves de ce processus lié à un même phénomène physique. Le processus est dit *ergodique* si les moyennes sur plusieurs réalisations sont équivalentes à des moyennes temporelles correspondant à une seule épreuve.

Ainsi un processus stationnaire et ergodique pourra être analysé à partir d'une seule expérimentation sur un temps suffisamment long (ces deux propriétés étant vérifiées a posteriori sur les résultats obtenus).

Ce signal aléatoire peut être continu (exemple de la figure 6.1) ou discret (nombre de valeurs finies). Étant donné que la plupart des signaux « informatif » mesurés et étudiés sont de types continus, nous nous intéresserons ici à cette classe de signaux.

6.1.2 Caractérisations statistiques

a) Caractérisation d'un signal aléatoire stationnaire

Soit un signal aléatoire s défini par sa loi de distribution ou loi de probabilité $p(s)$ et considéré comme stationnaire, nous pouvons caractériser ce signal avec les paramètres statistiques suivants :

– valeur moyenne ou espérance :

$$m_s = E_{\text{sp}}[s] = \int_{-\infty}^{+\infty} s \cdot p(s) \cdot ds \quad (6.1)$$

– valeur quadratique moyenne ou moment d'ordre 2 :

$$E_{\text{sp}}[s^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 \cdot p(s) \cdot ds \quad (6.2)$$

- écart quadratique moyen ou moment d'ordre 2 centré ou variance :

$$\sigma_s^2 = E_{\text{sp}} [(s - m_s)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (s - m_s)^2 \cdot p(s) \cdot ds \quad (6.3)$$

- écart type :

$$\sigma_s = \sqrt{E_{\text{sp}} [(s - m_s)^2]} \quad (6.4)$$

- fonction d'autocorrélation statistique : cette fonction, notée $\Gamma_s(t)$, est une indication sur la liaison statistique entre les valeurs du signal aléatoire s et s' mesurées à deux instants séparés de τ :

$$\Gamma_s(\tau) = E_{\text{sp}} [s(t) \cdot s(t - \tau)] = E_{\text{sp}} [s \cdot s'] = \iint_{-\infty}^{+\infty} s \cdot s' \cdot p(s, s'; \tau) \cdot ds \cdot ds' \quad (6.5)$$

b) Caractérisation d'un signal aléatoire stationnaire et ergodique

Si la variable aléatoire stationnaire est aussi ergodique, nous avons donc l'équivalence avec les caractéristiques temporelles, c'est-à-dire :

- moyenne temporelle :

$$\overline{s(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) \cdot dt \right\} \equiv m_s \quad (6.6)$$

- puissance du signal :

$$P_s = \overline{s^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s^2(t) \cdot dt \right\} \equiv E_{\text{sp}} [s^2] \quad (6.7)$$

- puissance des variations par rapport à la moyenne :

$$P_{s-m_s} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [s(t) - \overline{s(t)}]^2 \cdot dt \right\} = P_s - \overline{s(t)}^2 \equiv \sigma_s^2 \quad (6.8)$$

- valeur efficace des variations :

$$\sqrt{P_{s-m_s}} = \sqrt{P_s - \overline{s(t)}^2} \equiv \sigma_s \quad (6.9)$$

- fonction d'autocorrélation temporelle $C_{ss}(t)$:

$$C_{ss}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) \cdot s(t - \tau) \cdot dt \right\} \equiv \Gamma_s(\tau) \quad (6.10)$$

Nous pouvons remarquer que $C_{ss}(0) = P_s$.

c) Caractérisation d'un signal aléatoire gaussien

Considérons un processus aléatoire gaussien stationnaire décrivant une variable aléatoire s . Ce processus est complètement déterminé par la seule donnée de sa fonction de corrélation $C_{ss}(t)$. Nous avons la valeur moyenne exprimée par $m_s = \overline{s(t)}$.

L'écart quadratique moyen ou moment d'ordre 2 centré ou variance est donné par :

$$\sigma_s^2 = E_{\text{sp}} [(s)^2] = C_{ss}(0)$$

La densité de probabilité est sous la forme suivante :

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot C_{ss}(0)}} \cdot e^{-\frac{(s-m)^2}{2 \cdot C_{ss}(0)}} \quad (6.11)$$

6.2 SOURCES DE BRUIT

6.2.1 Bruit externe et bruit interne

Relativement au système considéré (filtre, détecteur, amplificateur, etc.), les sources de bruit sont classables en deux grandes catégories : externe et interne.

a) Bruit externe

La source de bruit est localisée à l'extérieur du système et agit sur celui-ci par influence. On peut distinguer deux origines :

- les perturbations naturelles (bruits cosmiques, bruits atmosphériques) ;
- les perturbations artificielles (parasites générés par des équipements électriques industriels). L'intensité de ces perturbations varie selon les lieux (zones rurales ou urbaines, logements ou usines, etc.).

Ces deux types de perturbations peuvent être considérés comme négligeables au-delà d'une fréquence de quelques dizaines de MHz.

b) Bruit interne

Les causes des perturbations internes à un système de traitement peuvent se classer en deux groupes :

- les perturbations impulsionnelles engendrées par des commutations de courants ;
- le *bruit de fond* généré dans les câbles et les composants électroniques en raison des mécanismes statistiques de la conduction électrique. Deux composantes principales le constituent :
 - bruit thermique (dans les circuits passifs comme les résistances) ;
 - bruit de grenaille (dans les composants actifs comme les diodes, transistors...).

Ces perturbations externes ou internes peuvent être éliminées ou fortement diminuées par des blindages pour le premier groupe ou un mode de construction soigné en ce qui concerne les parasites impulsionnels ; mais le bruit de fond est irréductible pour une température donnée.

6.2.2 Bruit thermique

Au-dessus du zéro absolu, l'agitation thermique des particules est à l'origine d'une tension de bruit qui apparaît sur toute résistance. Ce bruit thermique, appelé effet Johnson, se traduit par une tension moyenne efficace b_{eff}^2 , exprimée par la relation de Nyquist-Johnson :

$$b_{\text{eff}}^2 = 4 \cdot k \cdot T \cdot R \cdot \Delta f$$

avec k la constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-23}$ J/K), T la température (en K), R la résistance (en Ω) et Δf la bande passante du système à l'entrée duquel on suppose que la résistance bruyante est branchée (en Hz).

La puissance totale du bruit thermique obtenue dans une résistance constante aura pour valeur :

$$P_{th} = k \cdot T \cdot \Delta f \quad \text{exprimée en W}$$

Dans la bande de fréquences considérées Δf , ce bruit a une densité spectrale de puissance constante :

$$B(f) = B_0 \quad \text{avec} \quad B_0 = \frac{1}{2} kT \quad (6.12)$$

Ce type de bruit est appelé *bruit blanc* (fonction de valeur moyenne nulle). D'après la relation précédente 3.21, sa fonction d'autocorrélation temporelle $C_{bb}(t)$ est en première approximation une impulsion de Dirac ($C_{bb}(t) = 0$ sauf pour $t = 0$) (figure 6.2, page suivante) :

$$C_{bb}(t) = B_0 \cdot \delta(t) \quad (6.13)$$

Pratiquement, un tel bruit n'existe pas, mais on parlera de bruit blanc à chaque fois que son spectre de densité de puissance sera constant à l'intérieur de la bande passante utile du système étudié.

Si cette condition n'est pas entièrement satisfaite, on parlera de *bruit rose* : fonction d'autocorrélation impulsionnelle très étroite centrée sur $t = 0$. Il est possible de modéliser la densité spectrale d'un bruit rose par une fonction porte de largeur $2F_b$ (F_b : fréquence maximale du bruit rose), soit :

$$B(f) = B_0 \cdot \Pi_{2F_b}(f)$$

Sa fonction d'autocorrélation temporelle $C_{bb}(t)$ est alors donnée par :

$$C_{bb}(t) = B_0 \cdot (2F_b) \cdot \frac{\sin(2\pi F_b t)}{2\pi F_b t}$$

Mais dans le cas où F_b est grand, nous pourrions considérer que la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc ou d'un bruit rose est nulle pur $t > \tau_{\text{lim}}$ (figure 6.2, page suivante).

6.2.3 Bruit de grenaille et autres modèles

Le bruit de grenaille correspond aux fluctuations statistiques du nombre de porteurs de charge traversant une barrière de potentiel et qui participent à la création d'un

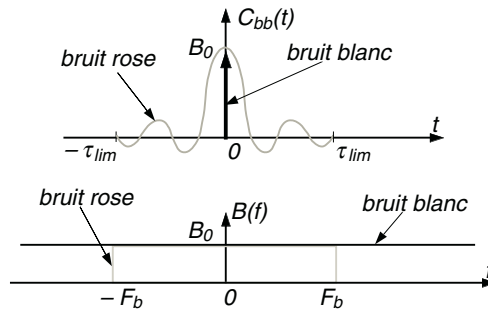


Figure 6.2. Fonction d'autocorrélation et densité spectrale d'un bruit blanc et d'un bruit rose.

courant. Une telle barrière existe à chaque jonction PN d'un semi-conducteur. Cet effet se produit également dans les mécanismes d'émission thermoélectrique et photoélectrique. Contrairement au bruit thermique qui existe en l'absence de tout courant de conduction moyen, le bruit de grenaille dépend du courant moyen et se superpose à celui-ci. On démontre que ce bruit peut aussi être supposé bruit blanc.

Pour simuler ou analyser des signaux réels, d'autres modèles de répartition fréquentielle du bruit peuvent être considérés. Ainsi, en particulier, deux modèles de bruit sont assez répandus :

- le bruit dit gaussien dont la densité spectrale à une répartition de type gaussien caractérisée par une valeur moyenne et un écart type (relation 6.11) ;
- le bruit dit périodique formé d'une somme de signaux sinusoïdaux sans référence de phase.

6.3 RAPPORT SIGNAL/BRUIT

Le rapport signal/bruit (S/B) est une caractéristique de la dégradation d'un signal, par définition informatif, par un bruit non informatif. C'est un moyen pour caractériser un système de transmission en comparant le rapport S/B à son entrée η_e avec le rapport à sa sortie η_s ou pour comparer la « qualité » des diverses méthodes de traitement de signaux.

Soit un signal $x(t)$, de puissance moyenne finie P_x mélangé avec du bruit blanc $b(t)$, on aura la puissance moyenne du signal résultant $s(t)$, somme des deux signaux $x(t)$ et $b(t)$, exprimée par :

$$P_s = P_{x+b} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) + b(t)]^2 dt$$

Le bruit étant supposé indépendant du signal, on obtient :

$$P_s = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 dt + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [b(t)]^2 dt = P_x + P_b \quad (6.14)$$

On définira donc le rapport signal/bruit η par le rapport de la puissance moyenne du signal et la puissance moyenne du bruit :

$$\eta = \frac{P_x}{P_b} = \frac{P_x}{\sigma_b^2}$$

Considérons un signal informatif de type cosinusoidal $x(t) = A \cos(\omega t)$; le rapport signal/bruit est donné par :

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{\sigma_b^2}$$

Ce rapport est exprimé le plus souvent en dB :

$$\eta_{dB} = 10 \cdot \log_{10}[\eta] = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{P_x}{P_b} \right]$$

6.4 DÉTECTION D'UN SIGNAL NOYÉ DANS LE BRUIT

Nous allons considérer ici un bruit blanc $b(t)$ possédant les caractéristiques données précédemment. En utilisant les propriétés de ce signal aléatoire particulier, nous présentons un ensemble d'applications fondamentales de la corrélation : détection, extraction, etc.

6.4.1 Détection par corrélation d'un signal périodique noyé dans un bruit blanc

Les propriétés des fonctions de corrélation donnent lieu à diverses méthodes de traitement des signaux bruités. Ces traitements supposent un bruit blanc dont la fonction d'autocorrélation est donnée par la relation 6.13. Soient un signal réel périodique $x(t)$ et un signal de bruit $b(t)$, indépendant de $x(t)$ et sans mémoire ($C_{bb}(\infty) = 0$). Le signal complet à traiter $s(t)$ est donné par la somme de ces deux signaux $s(t) = x(t) + b(t)$.

La fonction d'autocorrélation $C_{ss}(t)$ de ce signal est donnée par la relation 3.22 :

$$C_{ss}(\tau) = \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)s(t-\tau) dt = \int_{-T/2}^{+T/2} [x(t) + b(t)][x(t-\tau) + b(t-\tau)] dt$$

Étant donné la propriété de distributivité de l'opérateur de corrélation, il vient :

$$C_{ss}(\tau) = C_{xx}(\tau) + C_{xb}(\tau) + C_{bx}(\tau) + C_{bb}(\tau)$$

Or les fonctions $C_{xb}(t)$ et $C_{bx}(t)$ sont nulles, car les deux signaux sont indépendants. Ce résultat sera d'autant plus vrai que la période d'intégration T du corrélateur sera grande. La fonction $C_{bb}(t)$ est nulle en dehors de 0 si l'on considère un bruit blanc, ou devient négligeable au bout d'une durée finie de corrélation devant la fonction $C_{xx}(t)$ si l'on considère un bruit rose (figure 6.3, page suivante). Par conséquent, nous avons en sortie du corrélateur la fonction d'autocorrélation du signal informatif :

$$C_{ss}(\tau) = C_{xx}(\tau)$$

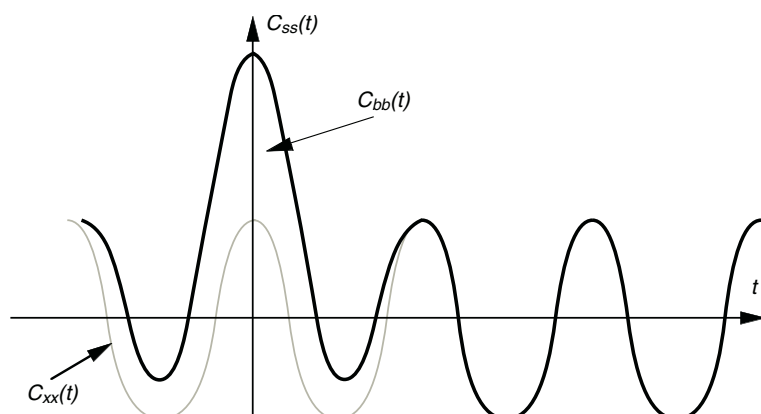


Figure 6.3. Détection d'un signal noyé dans un bruit.

Remarque : Nous avons utilisé une simulation afin d'illustrer l'utilisation de cette technique de détection par autocorrélation d'un signal noyé dans le bruit. Le signal bruité considéré est un signal sinusoïdal pur auquel a été ajouté un signal de bruit blanc. Cette simulation a été réalisée pour un signal non bruité (figure 6.4) et des signaux bruités avec des rapports signal/bruit égaux respectivement à 1, 0,5 et 0,1 (figure 6.5, page ci-contre).

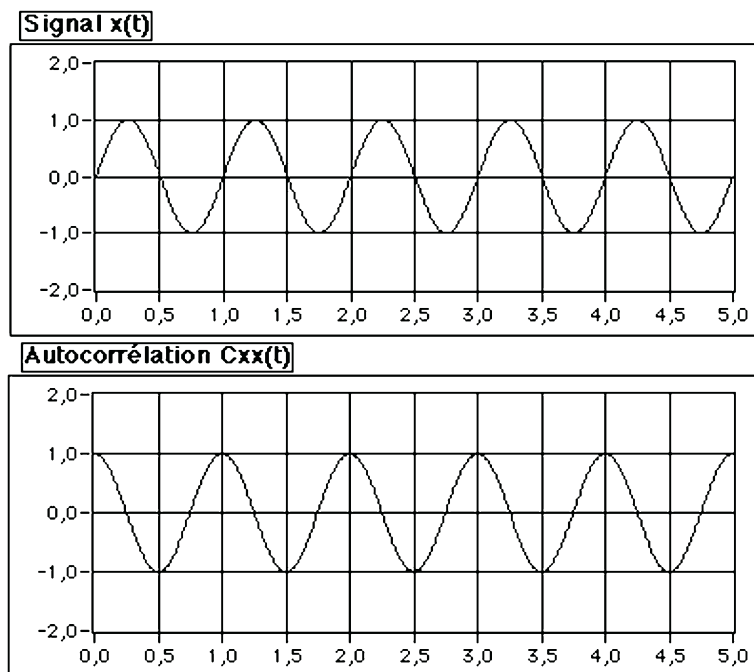


Figure 6.4. Autocorrélation d'un signal sinusoïdal pur.

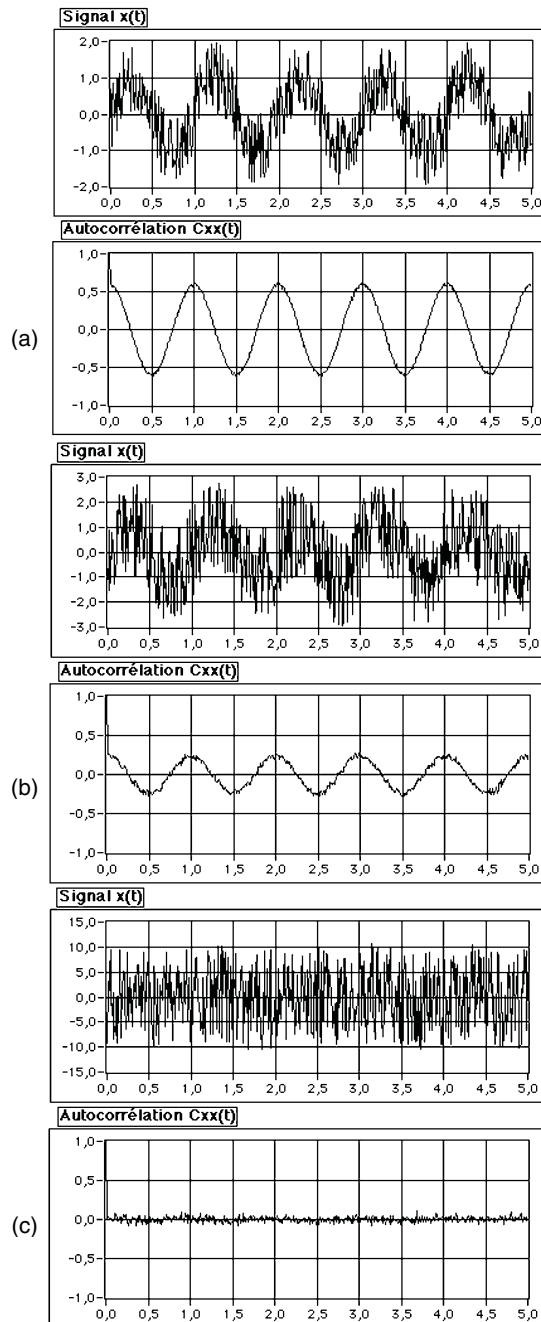


Figure 6.5. Détection d'un signal noyé dans un bruit blanc par autocorrélation avec des rapports signal/bruit : (a) = 1, (b) = 0,5 et (c) = 0,1. Il est important de noter que, dans le cas de la détection avec les signaux bruités, l'autocorrélation donne une amplitude très élevée à l'origine correspondant au terme $C_{bb}(t)$ non nul en $t = 0$.

Dans le premier cas du signal non bruité, la fonction de corrélation obtenue est conforme aux résultats établis au paragraphe 3.4.2, c'est-à-dire identique au signal initial, mais déphasée. Ensuite pour les trois simulations effectuées avec des rapports signal/bruit de 1, 0,5 et 0,1, les deux premiers cas donnent des résultats corrects au niveau de la détection ; le dernier cas, correspondant à un bruit d'amplitude 10 fois supérieure à celle du signal, montre que la détection n'est plus possible.

Un autre exemple encore plus significatif est visualisé sur la figure 6.6 avec l'autocorrélation d'un signal carré bruité avec un facteur de bruit égal à 1. Le signal obtenu après autocorrélation est un signal triangulaire qui est bien composé des mêmes fréquences (harmoniques d'ordre impair).

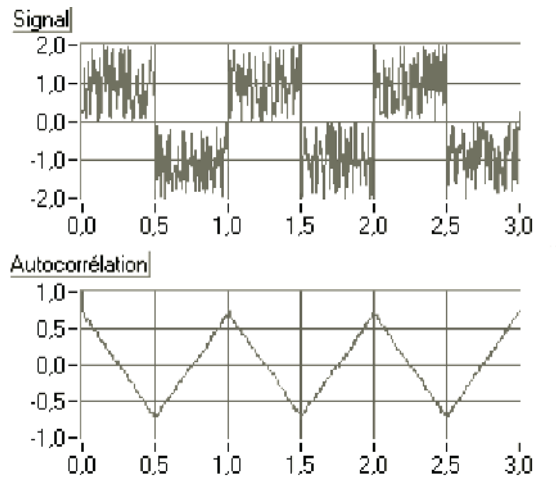


Figure 6.6. Résultats de détection d'un signal périodique carré noyé dans un bruit blanc uniforme (facteur de bruit égal à 1) par autocorrélation.

6.4.2 Détection synchrone par corrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit

Cette méthode de détection d'un signal noyé dans un bruit peut être encore plus efficace en terme d'extraction d'un signal faible par rapport au bruit en réalisant une détection synchrone. Au lieu de faire l'autocorrélation du signal bruité $s(t)$, le procédé consiste à réaliser la corrélation de ce signal $s(t)$ avec un signal sinusoïdal pur $x_p(t)$. En faisant varier la fréquence de ce signal sinusoïdal, la fonction de corrélation sera non nulle ou maximale à chaque fois que la fréquence du signal $x_p(t)$ sera identique à celle contenue dans le signal $x(t)$. En effet nous avons la fonction de corrélation :

$$C_{sx_p}(\tau) = C_{xx_p}(\tau) + C_{bx_p}(\tau)$$

De même que précédemment, la fonction $C_{bx_p}(\tau)$ est nulle ou devient nulle si le temps d'intégration du corrélateur est suffisamment grand, car les deux signaux sont

indépendants, d'où :

$$C_{sx_p}(\tau) = C_{xx_p}(\tau)$$

Ce procédé permettant de s'affranchir des autres fonctions de corrélations et en particulier de celle du bruit $C_{bb}(t)$, la détection est plus efficace et autorise des rapports signal/bruit beaucoup plus faibles.

Remarque : Nous avons simulé l'utilisation de cette technique de détection par corrélation d'un signal noyé dans le bruit avec un signal sinusoïdal pur. Le signal bruité considéré est un signal sinusoïdal pur auquel a été ajouté un signal de bruit blanc. Cette simulation a été réalisée pour un signal bruité et un rapport signal/bruit de 0,1 (figure 6.7).

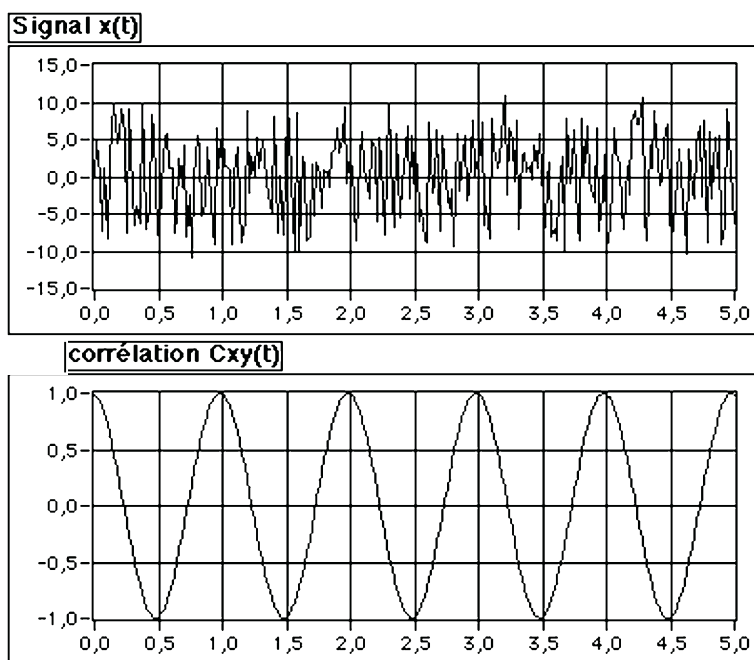


Figure 6.7. Détection d'un signal bruité par corrélation avec un signal sinusoïdal pur et un rapport signal/bruit égal à 0,1.

Cette méthode de détection est très puissante. Elle est par exemple très utilisée dans le domaine de la radioastronomie pour déterminer les pulsations radioélectriques d'étoiles lointaines, sachant que les signaux captés sont fortement entachés de bruit. La fréquence du signal à détecter n'étant en général pas connu, la réalisation pratique d'une telle détection se fait grâce à l'utilisation de générateur possédant la fonction de vobulation en fréquence. Le terme de vobulation correspond à la possibilité de faire varier linéairement la fréquence du signal de sortie du générateur en fonction du temps. La vitesse d'exploration d'un domaine de fréquence peut aussi en général être choisie.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 6.1 (Caractérisation d'un signal aléatoire : exemple de la modulation)

Considérons un signal sinusoïdal $s(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ d'amplitude a , de pulsation ω et de phase φ . Comme nous l'avons vu au chapitre 5, ce signal peut être le support (onde porteuse) d'un signal informatif à transporter. La modulation s'effectue en faisant varier au rythme du signal informatif ou modulant l'un des trois paramètres du signal porteur $s(t)$. Nous allons supposer que le signal modulant est un processus aléatoire de distribution uniforme sur un intervalle fixé. Ainsi, nous pouvons distinguer les trois cas suivants (figure 6.8) :

- cas I (modulation d'amplitude) : a est une variable aléatoire, $\omega = \Omega = \text{Cte}$ et $\varphi = 0 = \text{Cte}$;
- cas II (modulation de fréquence ou de pulsation) : ω est une variable aléatoire, $a = A = \text{Cte}$ et $\varphi = 0 = \text{Cte}$;
- cas III (modulation de phase) : φ est une variable aléatoire, $a = A = \text{Cte}$ et $\omega = \Omega = \text{Cte}$.

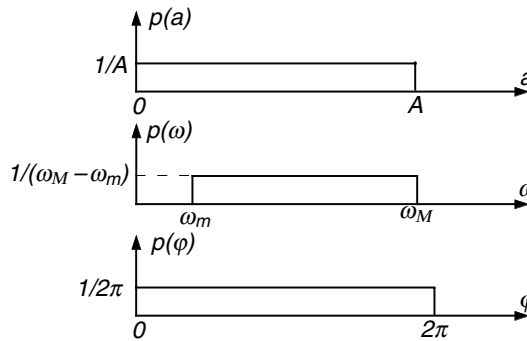


Figure 6.8. Fonctions de distribution des variables aléatoires a , ω et φ .

Pour ces trois cas, caractériser la variable aléatoire $s = s(t_0)$ obtenue à l'instant quelconque fixé t_0 , c'est-à-dire calculer la densité de probabilité $p(s)$, la fonction de répartition $P(s) = \text{Prob}\{s' \leq s\}$, la moyenne statistique m_s et la variance ou moyenne quadratique centrée σ_s :

Solution

Dans le cas I de la modulation d'amplitude, nous avons (figure 6.9, page ci-contre) :

$$s = a \cdot \sin(\Omega \cdot t_0) = a \cdot k_0$$

avec $k_0 \in [+1, -1]$ selon la valeur de t_0 et

$$p(s) = 1 / |A \cdot k_0|$$

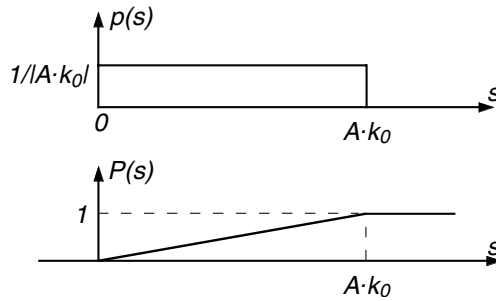


Figure 6.9. Fonctions de distribution et de répartition de la variable aléatoire $s = s(t_0)$ dans le cas d'une modulation d'amplitude (cas I) avec $t_0 > 0$.

avec $s \in [0, Ak_0]$ ou $s \in [Ak_0, 0]$ selon la valeur de t_0

et

$$P(s) = \frac{s}{|A \cdot k_0|} \quad \text{si } s \in [0, Ak_0]$$

$$P(s) = \frac{-s}{|A \cdot k_0|} \quad \text{si } s \in [Ak_0, 0]$$

Ces lois statistiques dépendent de la valeur de t_0 , aussi nous pouvons conclure que cette variable aléatoire n'est pas stationnaire. De plus, nous avons :

– la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} \text{si } s \in [0, Ak_0] & \quad \text{alors } m_s = |A \cdot k_0| / 2 \\ \text{si } s \in [Ak_0, 0] & \quad \text{alors } m_s = -|A \cdot k_0| / 2 \end{aligned}$$

– la valeur quadratique moyenne :

$$\begin{aligned} \text{si } s \in [0, Ak_0] & \quad \text{alors } E_{sp}[s^2] = \frac{(A \cdot k_0)^2}{3} \\ \text{si } s \in [Ak_0, 0] & \quad \text{alors } E_{sp}[s^2] = -\frac{(A \cdot k_0)^2}{3} \end{aligned}$$

La valeur moyenne temporelle $\overline{s(t)}$ du signal $s(t)$ étant nulle ($\overline{s(t)} \neq m_s$), le processus associé à cette variable aléatoire n'est pas ergodique.

Dans le cas II de la modulation de fréquence, nous avons (figure 6.10, page suivante) :

$$s = A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$$

avec les variables aléatoires $\omega \in [\omega_m, \omega_M]$ et $s \in [-A, +A]$.

En posant $\Delta\omega = \omega_M - \omega_m$ et $t_0 \cdot \Delta\omega = k \cdot (2\pi) + \Delta\varphi$, il vient :

$$P(s) = \frac{2(k+1) \cdot \text{Arcsin}(s/A) + (k-1)\pi + \Delta\varphi}{k2\pi + \Delta\varphi}$$

et

$$p(s) = \frac{2(k+1)}{k2\pi + \Delta\varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - s^2}} \quad \text{avec } p(0) = \frac{2(k+1)}{k2\pi + \Delta\varphi} \cdot \frac{1}{A}$$

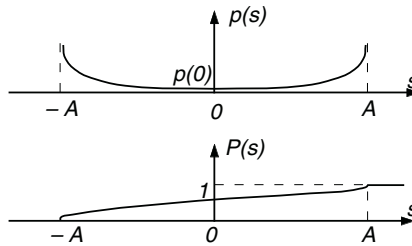


Figure 6.10. Fonctions de distribution et de répartition de la variable aléatoire $s = s(t_0)$ dans le cas d'une modulation de fréquence (cas II).

Ces lois statistiques sont indépendantes de la valeur de t_0 , aussi nous pouvons conclure que cette variable aléatoire est stationnaire. De plus, nous avons :

$$m_s = 0 \equiv \overline{s(t)}$$

et

$$E_{sp}[s^2] = \sigma_s^2 = \frac{(k+1) \cdot \pi}{2k\pi + \Delta\varphi} \cdot A^2 \quad \text{variable aléatoire centrée } (m_s = 0)$$

Ainsi les moyennes statistique et temporelle sont identiques, par contre les valeurs quadratiques moyennes statistique et temporelle sont différentes ($P_s = A^2/2$). Donc le processus associé à cette variable aléatoire n'est pas ergodique.

Dans le cas III de la modulation de phase, nous avons :

$$s = A \cdot \sin(\Omega \cdot t_0 + \varphi)$$

avec les variables aléatoires $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $s \in [-A, +A]$.

Ce cas III est un cas particulier de la modulation de fréquence en considérant que l'excursion de fréquence produit une variation de phase entre 0 et 2π . Aussi il suffit de reporter dans les relations précédentes du cas II les valeurs suivantes :

$$k = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\varphi = 2\pi$$

Les résultats sont :

$$P(s) = \frac{1}{\pi} \cdot \text{Arcsin}(s/A) + \frac{1}{2}$$

et

$$p(s) = 1/(\pi \cdot \sqrt{A^2 - s^2}) \quad \text{avec} \quad p(0) = \frac{1}{\pi \cdot A}$$

Ces lois statistiques sont indépendantes de la valeur de t_0 , aussi nous pouvons conclure que cette variable aléatoire est stationnaire. Les courbes de représentations de ces deux fonctions sont identiques à celle de la figure 6.10. De plus, nous avons :

$$m_s = 0 \equiv \overline{s(t)}$$

et

$$E_{sp}[s^2] = \sigma_s^2 = \frac{A^2}{2} \equiv P_s = \overline{s^2(t)} \quad \text{variable aléatoire centrée } (m_s = 0)$$

Ainsi les moyennes statistique et temporelle, les valeurs quadratiques moyennes statistique et temporelle sont identiques. Il serait aussi possible de calculer l'autocorrélation statistique et temporelle et de vérifier leur identité :

$$C_{ss}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(\Omega \cdot \tau) \equiv \Gamma_s(\tau) \quad \text{variable aléatoire centrée } (m_s = 0)$$

Le processus associé à cette variable aléatoire est donc ergodique.

On vérifie bien la relation 6.10 sur la valeur à l'origine de la fonction d'autocorrélation $C_{ss}(0) = P_s$.

Exercice 6.2 (Identification d'un processus à l'aide d'un bruit blanc)

Un domaine important de l'automatique est l'identification de processus, c'est-à-dire la détermination de la réponse impulsionnelle ou de la fonction de transfert d'un système de convolution. Ce système étant supposé accessible que par sa sollicitation en entrée et le signal émis en sortie, l'identification consiste à injecter en entrée un signal permettant d'en déduire ensuite par mesure du signal de sortie la réponse impulsionnelle. La méthode la plus directe est basée sur le fait que l'impulsion de Dirac est l'élément neutre de la convolution et, par conséquent, si le signal d'entrée est une impulsion de Dirac, le signal de sortie est directement la réponse impulsionnelle. Cette méthode présente l'inconvénient d'avoir à faire une approximation imparfaite de l'impulsion de Dirac (impulsion d'amplitude infinie et de durée nulle). En effet ce signal d'entrée ne doit pas endommager le système à analyser ; aussi le générateur d'impulsions fournit une impulsion d'amplitude limitée et de durée courte mais non nulle. Pour éliminer ce problème, l'identification peut être réalisée en utilisant un corrélateur et un générateur de bruit blanc selon le montage présenté sur la figure 6.11.

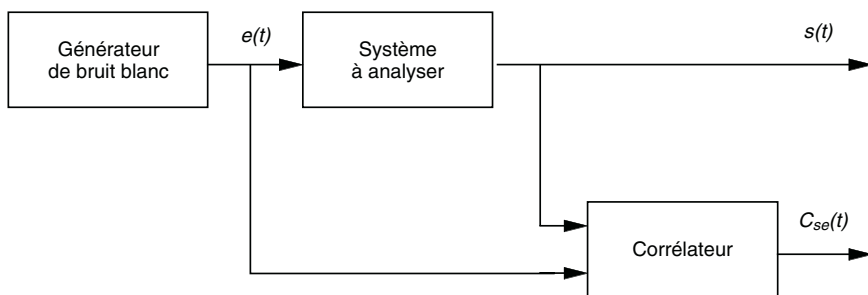


Figure 6.11. Principe de l'identification de processus utilisant un générateur de bruit blanc.

Calculer le signal obtenu à la sortie du corrélateur en fonction de la réponse impulsionnelle cherchée $h(t)$.

Solution

Soit un générateur de bruit blanc fournissant un signal $e(t) = b(t)$, nous avons la propriété suivante (paragraphe 3.4.2) :

$$C_{ee}(t) = e(t) * \bar{e}(-t) = C_{bb}(t) = B_0 \cdot \delta(t)$$

Le signal de sortie $s(t)$ du système à analyser, système linéaire, continu et stationnaire (filtre) a par définition la forme suivante :

$$s(t) = h(t) * e(t)$$

Le corrélateur réalise donc l'opération de corrélation entre $e(t)$ et $s(t)$, soit sous la forme d'un produit de convolution :

$$C_{se}(t) = s(t) * \bar{e}(-t) = h(t) * [e(t) * \bar{e}(-t)] = h(t) * [B_0 \cdot \delta(t)] = B_0 \cdot [h(t) * \delta(t)]$$

soit

$$C_{se}(t) = B_0 \cdot h(t)$$

Ainsi, à la sortie du corrélateur, nous obtenons la réponse impulsionnelle à une constante près. La sortie du corrélateur donne donc directement la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système à identifier.

PARTIE 2

LE TRAITEMENT DES SIGNAUX NUMÉRIQUES

Chapitre 7

Numérisation des signaux

7.1 ÉCHANTILLONNAGE

L'échantillonnage consiste à représenter un signal analogique continu $s(t)$ par un ensemble de valeurs discrètes $s(nT_e)$ avec n entier et T_e constant appelé *période d'échantillonnage*. Cette opération est réalisée par un circuit appelé « préleveur ou échantillonneur » symbolisé souvent par un interrupteur. Dans une première phase, nous pouvons faire l'hypothèse que cette durée de prélèvement du signal est très courte et négligeable.

En supposant que le système numérique ne réalise aucun traitement sur le signal enregistré, l'enchaînement des différents signaux dans une chaîne d'acquisition et de restitution de données par un système numérique est celui présenté sur la figure 7.1, page suivante. Le signal analogique d'entrée V_e est échantillonné pour donner un signal discrétisé temporellement $V_e(nT_e)$. Mais après cette phase de prélèvement d'échantillons, il est nécessaire de coder la donnée réelle obtenue dans un ensemble fini de valeurs : opération de *quantification*. Après cette quantification du signal, les différentes valeurs sont mémorisées dans le système numérique selon l'ordre de leur arrivée, formant ainsi une suite de valeurs numériques $V_e(n)$. Si, comme supposé, le système numérique n'effectue aucun traitement sur ces valeurs $V_e(n) = V_s(n)$, cette suite de nombres $V_s(n)$ est envoyée vers le procédé externe en réalisant successivement deux étapes. D'une part le système doit restituer la valeur analogique $V_s(nT_s)$ qui est l'opération inverse de la quantification et ensuite il est nécessaire de

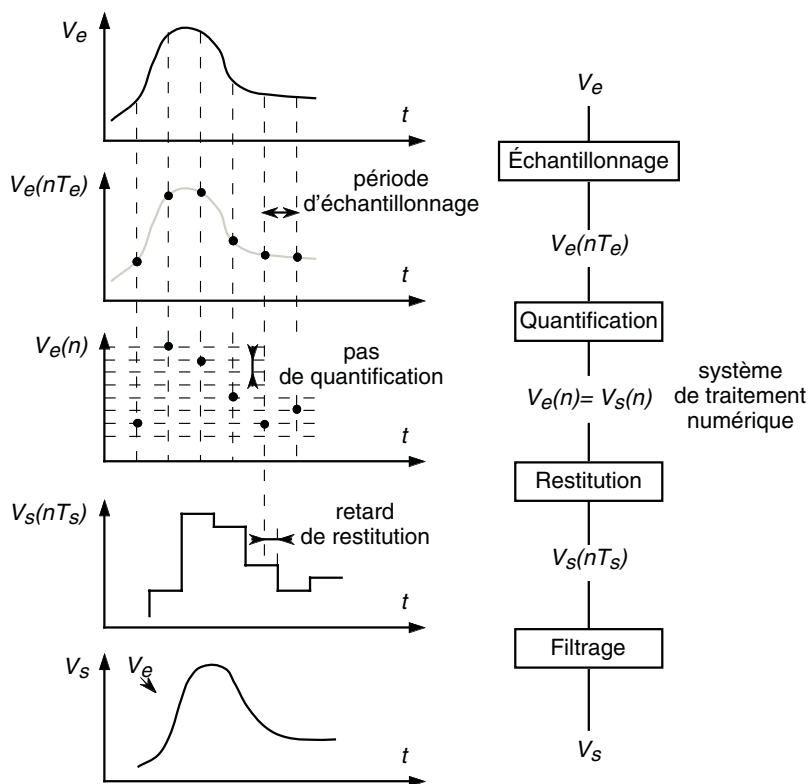


Figure 7.1. Évolution d'un signal à travers une chaîne d'acquisition et de restitution de données sans modification des valeurs. T_e est la période d'échantillonnage et T_s la période restitution supposée égale à T_e .

mettre en place le filtrage de ce signal pour obtenir un signal de sortie V_s sans fronts raides.

Dans ce cas très simple, si l'on considère une période de restitution égale à la période d'échantillonnage ($T_s = T_e$), le résultat attendu est une restitution identique ou la plus proche possible du signal d'entrée : $V_s = V_e$. La différence, qui va exister entre ces deux signaux d'entrée et de sortie, est due à de nombreux paramètres dont les trois plus importants sont :

- la période d'échantillonnage T_e ;
- le pas de quantification ou la précision de numérisation du signal ;
- le temps de réponse du système numérique entre l'acquisition et la restitution du signal.

Les deux derniers paramètres peuvent être facilement traités en augmentant la précision du convertisseur analogique numérique, c'est-à-dire en procédant à un accroissement de l'ensemble de codage, (chapitre 12) d'une part et d'autre part en choisissant un système numérique de traitement plus rapide pour limiter le retard à la restitution.

Mais la détermination du premier paramètre, qui est le choix de la période d'échantillonnage, est plus difficile. En effet, il est clair que la diminution du temps entre deux échantillons ne peut qu'améliorer la chaîne de traitement numérique. Mais cette diminution de la période d'échantillonnage est au prix du traitement (acquisition, mémorisation et restitution) d'un plus grand nombre d'échantillons. Le problème de l'échantillonnage se pose donc en ces termes : existe-t-il, pour un signal donné, une période d'échantillonnage qui soit un « bon compromis » entre la qualité du traitement numérique et la minimisation du nombre de mesures ou d'échantillons ?

7.1.1 Échantillonnage idéal

a) Définition

On suppose que le signal $s(t)$ a un spectre à support borné, c'est-à-dire que le spectre est limité : $S(f) = 0$ pour $f > f_{\max}$ (figure 7.2). Cette limitation spectrale est soit naturelle (répartition initiale du signal), soit artificielle en utilisant un filtre comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

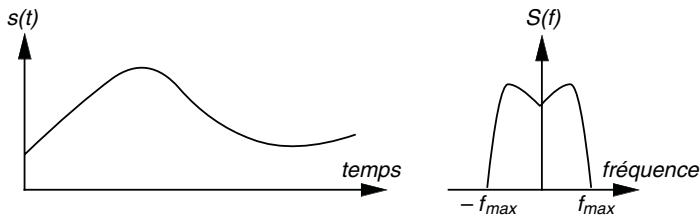


Figure 7.2. Signal à spectre borné.

Envisagé dans le domaine temporel, le processus d'échantillonnage revient à multiplier le signal analogique $s(t)$ par une série d'impulsions unité : le « signal » obtenu est alors constitué d'une succession d'impulsions, dont la hauteur est modulée par l'amplitude du signal échantillonné (figure 7.3, page suivante). Cette opération mathématique, permettant d'avoir une représentation du signal échantillonné $s_e(t)$, s'obtient en utilisant le peigne de Dirac (annexe A). Le peigne de Dirac, utilisé dans l'échantillonnage des signaux, est une suite de pics de Dirac régulièrement espacés de la période d'échantillonnage T_e :

$$\text{Pgn}_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_e)$$

Le signal échantillonné $s_e(t)$ est une suite de pics de Dirac dont les poids sont les valeurs du signal $s(t)$ aux instants kT_e . Nous avons donc l'expression de $s_e(t)$:

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - k \cdot T_e) \quad (7.1)$$

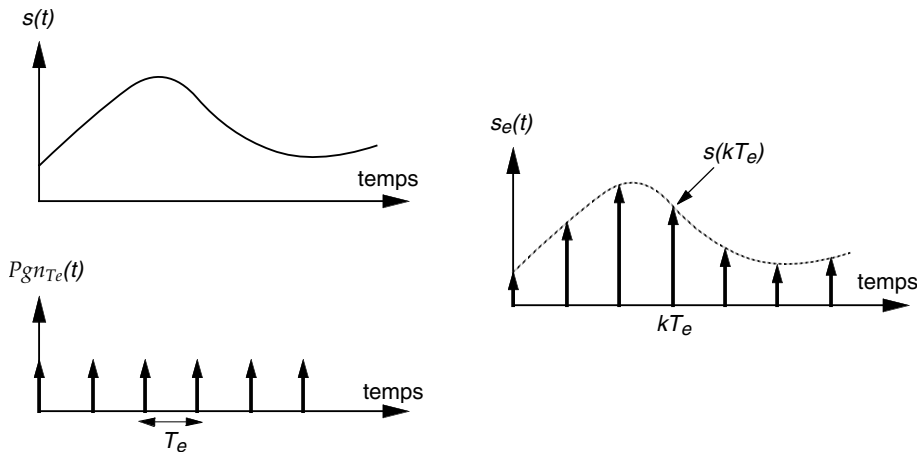


Figure 7.3. Représentation mathématique du signal échantillonné à une cadence de T_e . Échantillonnage par multiplication du signal par le peigne de Dirac.

D'après les propriétés du pic de Dirac, l'expression 7.1 du signal échantillonné peut être mise sous la forme de l'expression suivante qui est rigoureusement équivalente :

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - k \cdot T_e) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_e)$$

ou

$$s_e(t) = s(t) \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t) \quad (7.2)$$

Ainsi, d'un point de vue mathématique, l'opération d'échantillonnage est représentée par la multiplication par la fonction « peigne » de Dirac.

La question essentielle à se poser est : le signal échantillonné $s_e(t)$ contient-il la même information que le signal initial $s(t)$? Une manière de répondre à cette question est d'étudier le spectre $S_e(f)$ du signal échantillonné $s_e(t)$ et de la comparer au spectre $S(f)$ du signal initial $s(t)$. Nous connaissons la transformée de Fourier de la suite de pics de Dirac (annexe C) qui est donnée par :

$$\text{Pgn}_{T_0}(t) \xleftrightarrow{F} F_0 \cdot \text{Pgn}_{F_0}(f) = F_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(f - nF_0)$$

D'après le théorème de Plancherel, le spectre du signal échantillonné sera donné par le produit de convolution du spectre du signal initial avec la transformée de Fourier de la suite de pics de Dirac :

$$S_e(f) = S(f) * \left[F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot F_e) \right]$$

Étant donné la propriété du pic de Dirac, élément neutre de la convolution (annexe A), le résultat est :

$$S_e(f) = F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - k \cdot F_e) \quad (7.3)$$

Par conséquent, le spectre de l'échantillonné $S_e(f)$ s'obtient en périodisant avec une période égale à F_e , sur l'axe des fréquences, la transformée $S(f)$ de Fourier du signal initial $s(t)$ multiplié par F_e (figure 7.4).

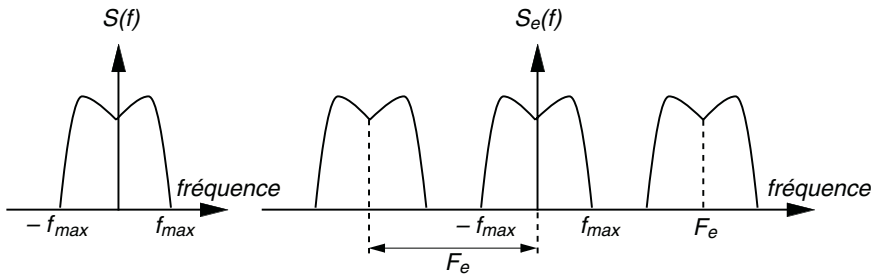


Figure 7.4. Périodisation du spectre du signal échantillonné.

b) Théorème de Shannon

À partir de ce premier résultat, représenté sur la figure 7.4, nous pouvons faire une première remarque : pour que la répétition périodique du spectre du signal échantillonné ne déforme pas le motif répété, il faut et il suffit que la fréquence de répétition F_e , qui est la fréquence d'échantillonnage, soit égale ou supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal initial $f_{\max}$. C'est le théorème de l'échantillonnage ou aussi appelé *théorème de Shannon* :

$$F_e \geq 2 \cdot f_{\max} \quad (7.4)$$

Pour une fréquence d'échantillonnage fixée et égale à F_e , la fréquence limite $F_e/2$, appelée fréquence de Shannon ou fréquence de Nyquist ou encore fréquence de repliement (*folding frequency*), correspond à la fréquence maximale admissible dans le spectre du signal afin d'éviter les distorsions du spectre de l'échantillonné.

c) Extraction du signal initial à partir du signal échantillonné

Comme nous l'avons vu dans l'introduction de ce chapitre, le problème de l'échantillonnage peut être aussi posé en termes de retour au signal initial à partir du signal échantillonné, c'est-à-dire, si l'on dispose du signal $s_e(t)$, peut-on retrouver le signal $s(t)$?

En supposant le signal initial à spectre borné par $f_{\max}$ et la condition du théorème d'échantillonnage remplie, le spectre de base $S_{e0}(f)$ peut être facilement isolé. Ainsi en considérant directement la relation 7.3, ce spectre de base est :

$$S_{e0}(f) = F_e \cdot S(f) \quad (7.5)$$

d'où, en appliquant la transformée de Fourier inverse à cette relation, nous avons la relation temporelle entre le signal $s_{e0}(t)$ correspondant à ce spectre de base $S_{e0}(f)$ et le signal initial $s(t)$:

$$s_{e0}(t) = F_e \cdot s(t) \quad (7.6)$$

Mais il est possible de formaliser cette extraction du spectre périodique de l'échantillonné $S_e(f)$ en utilisant un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $F_e/2$ (figure 7.5). La fonction réalisée par le filtre passe-bas idéal, encore appelée fonction porte, s'écrit $\Pi_{F_e}(f)$. La transformée de Fourier inverse de cette fonction est la fonction $\text{sinc}(F_e t)$ (chapitre 2). On peut donc exprimer le spectre de base $S_{e0}(f)$ de l'échantillonné sous la forme suivante :

$$S_{e0}(f) = S_e(f) \cdot \Pi_{F_e}(f) \quad (7.7)$$

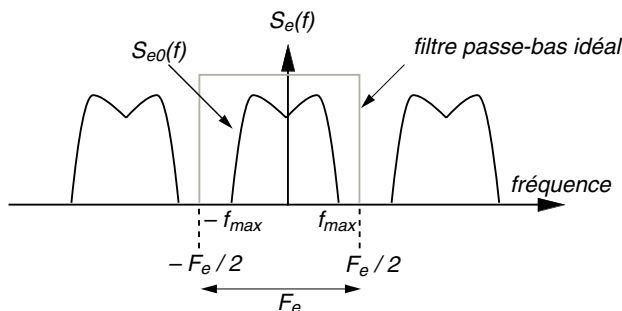


Figure 7.5. Filtrage passe-bas idéal permettant d'extraire du spectre du signal échantillonné le spectre du signal initial.

En prenant la transformée de Fourier inverse de la relation précédente et en appliquant le théorème de Plancherel, on obtient l'expression du signal temporel ayant le spectre de base $S_{e0}(f)$ du signal échantillonné :

$$s_{e0}(t) = s_e(t) * [F_e \cdot \text{sinc}(F_e t)] = F_e \cdot \left[s_e(t) * \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t} \right]$$

En considérant l'expression 7.1 du spectre du signal échantillonné, il vient :

$$s_{e0}(t) = F_e \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - k \cdot T_e) \right] * \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t}$$

d'où

$$s_{e0}(t) = F_e \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi F_e(t - kT_e))}{\pi F_e(t - kT_e)} \right] \quad (7.8)$$

En identifiant les deux relations 7.6 et 7.8 donnant une expression de $s_{e0}(t)$, nous obtenons une expression de $s(t)$ en fonction des échantillons prélevés aux instants T_e :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi F_e(t - kT_e))}{\pi F_e(t - kT_e)} \quad (7.9)$$

Définition. À partir de ce résultat, le théorème de l'échantillonnage peut aussi s'exprimer de la manière suivante.

Un signal continu de spectre borné dans l'intervalle de fréquences $(-f_{\max}, +f_{\max})$ est complètement déterminé par les valeurs qu'il prend à des instants régulièrement espacés de $1/(2f_{\max})$.

En effet cette somme de produits « $s(kT_e) \cdot \text{sinc}(F_e(t - kT_e))$ » permet de reconstituer exactement le signal et donc l'échantillonnage idéal, dans les conditions du théorème de Shannon, conserve la *totalité de l'information* contenue dans le signal.

7.1.2 Effet de repliement du spectre

a) Phénomène de repliement de spectre

Dans le cas où la condition du théorème de Shannon n'est pas respectée, il y a donc un phénomène de recouvrement de spectre (*folding, aliasing*). Le filtre passe-bas idéal, qui permettait de récupérer le spectre de base identique au spectre du signal initial, ne peut plus agir efficacement dans ces conditions. La figure 7.6 présente ce chevauchement de spectre et donc le spectre résultant. C'est ainsi qu'une fréquence située dans la zone de repliement est susceptible d'appartenir à la fois au spectre de base du signal initial et à son spectre image décalé de $\pm F_e$.

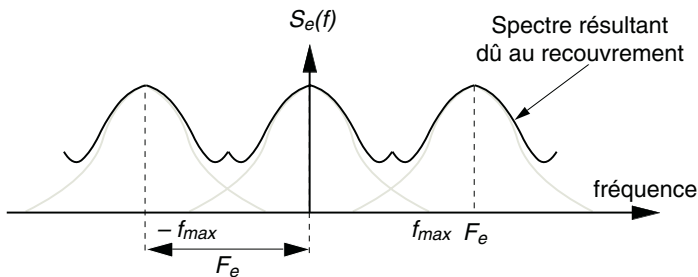


Figure 7.6. Recouvrement de spectre dans le cas du non-respect du théorème de Shannon ($F_e < 2f_{\max}$).

Cet effet peut être vu comme un effet stroboscopique. Ainsi, pour une fréquence d'échantillonnage F_e telle que $F_e < 2f_{\max}$ (non respect du théorème d'échantillonnage), une fréquence f_r comprise entre $F_e/2$ et $f_{\max}$ est vue comme la fréquence $F_e - f_r$, dite fréquence fantôme de la fréquence f_r . Cette raie fréquentielle due au repliement va apparaître comme une raie appartenant au signal alors qu'elle n'a aucune existence réelle (figure 7.7, page suivante). Ou encore l'amplitude de cette raie fantôme va s'ajouter à l'amplitude de la composante fréquentielle $f_n = F_e - f_r$ existant réellement.

Il est important de remarquer que l'échantillonnage idéal est réalisé à l'aide d'impulsions excessivement brèves, aussi le spectre se répète indéfiniment sans

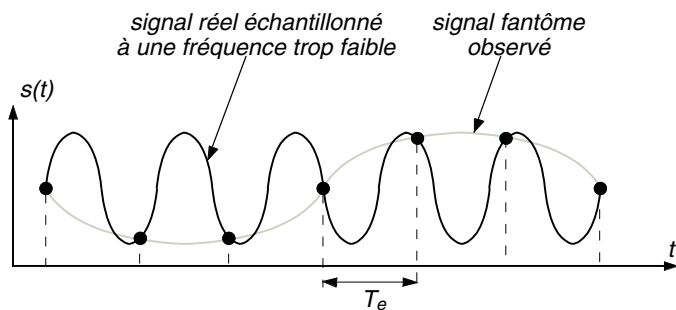


Figure 7.7. Effet stroboscopique du recouvrement de spectre : existence d'une fausse fréquence.

atténuation. Dans la pratique (paragraphe suivant), la durée de prélèvement d'un échantillon du signal a une valeur finie. Dans ce cas, la répétition du spectre se fait avec un affaiblissement progressif et diminue ainsi l'effet de repliement.

b) Filtre passe-bas anti-repliement

Pour éviter les répliques indésirables dues au repliement, il est indispensable que le spectre du signal ne dépasse en aucun cas la fréquence de Nyquist : $F_e/2$; cette fréquence est la plus élevée du signal qui soit sa propre réplique. Si le signal analogique possède des fréquences supérieures, il faut faire précéder l'échantillonneur d'un *filtre passe-bas anti-repliement*, dont la fréquence de coupure est la fréquence de Nyquist, de manière à supprimer toute fausse fréquence. Dans la plupart des cas, ce filtrage est indispensable ; en effet le signal peut soit intégrer des hautes fréquences inutiles pour son exploitation, soit être superposé à un bruit qui augmente fortement la fréquence maximale (figure 7.8).

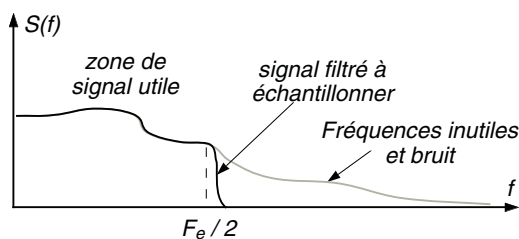


Figure 7.8. Utilisation d'un filtre anti-repliement afin de limiter réellement la largeur de bande fréquentielle du signal à échantillonner.

Remarque : Le signal de la parole, utilisé pour les communications téléphoniques, possède des composantes fréquentielles qui s'étendent au-delà de 10 kHz : composantes de la voix et du bruit. Mais il est limité à 4 kHz pour pouvoir appliquer une fréquence d'échantillonnage de 8 kHz et réduire ainsi fortement la taille des données à transmettre.

Théoriquement, ce filtre analogique à la fréquence de $F_c/2$ doit avoir une pente de réjection infinie, ce qui est physiquement impossible. Les filtres seront choisis avec

une pente d'autant plus faible que la fréquence maximale du signal est inférieure à la fréquence de Nyquist. Par exemple, si l'on désire échantillonner un signal jusqu'à la fréquence maximale $f_{\max}$, la fréquence d'échantillonnage F_e sera choisie égale à $nf_{\max}$ avec n variant de 2,5 à 5 pour éloigner la fréquence de Nyquist ($F_e/2$) de la fréquence maximale choisie, et ainsi obtenir une atténuation suffisante des fréquences sosies (figure 7.9).

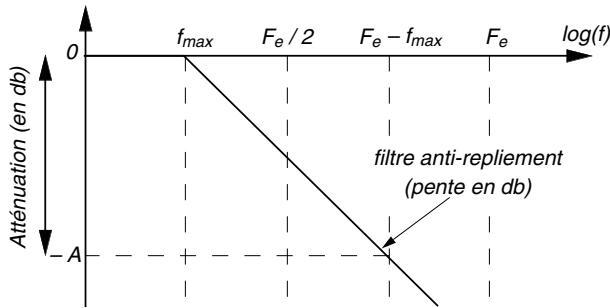


Figure 7.9. Diagramme de Bode d'un filtre anti-repliement.

Pour avoir une atténuation A en dB au niveau de la première fréquence de repliement $F_e - f_{\max}$, la pente du filtre p s'exprime en dB/octave selon la relation suivante :

$$p = \frac{A \log 2}{\log \left[\frac{F_e - f_{\max}}{f_{\max}} \right]} = \frac{A \log 2}{\log (n - 1)} \quad (7.10)$$

Dans la pratique la réalisation de l'échantillonnage d'un signal sera un compromis entre la raideur du filtre passe-bas d'entrée et la fréquence d'échantillonnage (figure 7.10). On peut ainsi remarquer que pour avoir une atténuation de 100 (−40 dB) au niveau de la première fréquence fantôme et utiliser un filtre passe-bas du deuxième ordre (soit : −12 dB/octave), il est nécessaire de prendre une fréquence d'échantillonnage égale à 11 fois la fréquence maximale choisie.

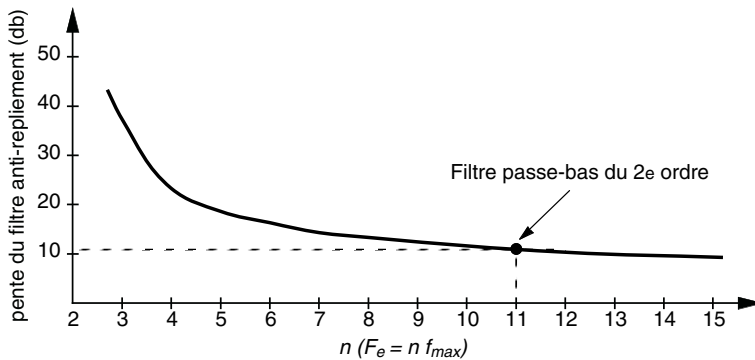


Figure 7.10. Évaluation de la pente du filtre anti-repliement en fonction du rapport fréquence d'échantillonnage sur fréquence maximale nécessaire pour avoir une atténuation de 100 pour la première fréquence fantôme.

7.1.3 Échantillonnage naturel et autres procédés

L'échantillonnage idéal impliquant des impulsions infiniment courtes n'est qu'approximativement réalisable. Dans la pratique, on utilisera des impulsions de durée courte mais finie. Le choix entre les divers procédés possibles se fera suivant les moyens techniques disponibles et la déformation tolérable lors de la restitution du signal.

Le signal échantillonné réel sera constitué alors d'une suite d'impulsions distantes de T_e et de largeur τ . L'amplitude de ces impulsions sera fonction du procédé d'échantillonnage utilisé (figure 7.11) :

- *naturel* : amplitude égale à $s(t)$ pendant la durée τ ;
- *régulier* : amplitude constante et égale à $s(nT_e)$ pendant la durée τ ;
- *moyenneur* : amplitude égale à la moyenne de $s(t)$ sur l'intervalle τ .

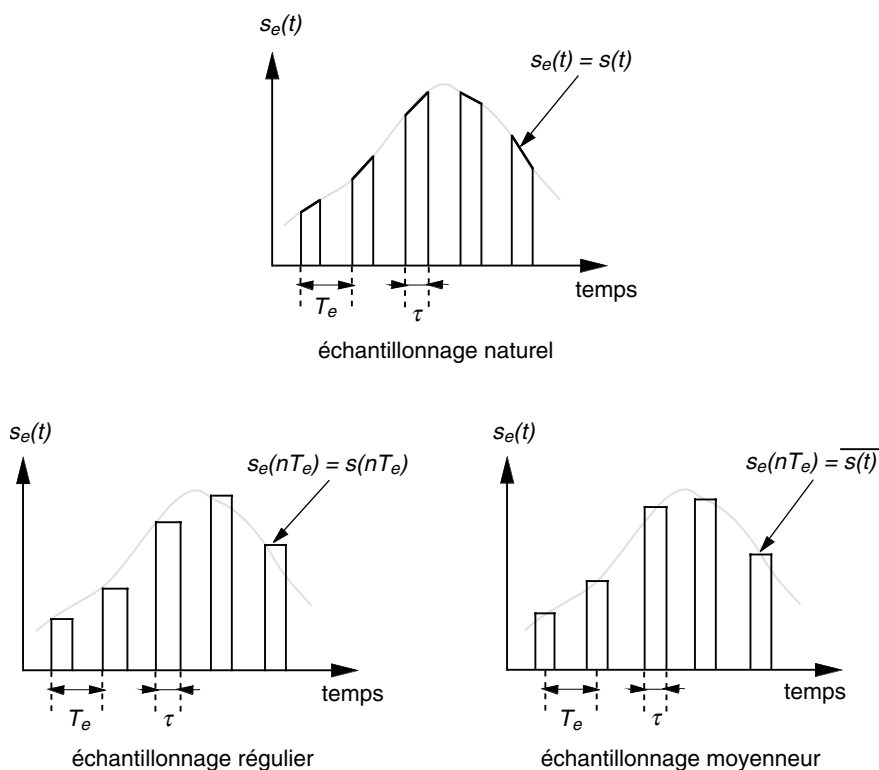


Figure 7.11. Les divers procédés d'échantillonnage : naturel (non réalisable), régulier et moyenneur (réalisables).

Le premier type d'échantillonnage n'est pas réalisable, il constitue simplement une étape de calcul intermédiaire nécessaire à la compréhension des deux autres procédés qui sont effectivement réalisés et utilisés.

La modélisation de l'échantillonnage réel qui utilise des impulsions distantes de T_e et de largeur τ , est faite en prenant une fonction « porte » de largeur τ et périodisée

avec une période T_e . Ce signal, appelé $i_{T_e, \tau}(t)$, s'exprime mathématiquement sous la forme suivante :

$$i_{T_e, \tau}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_{\tau}(t - kT_e)$$

En utilisant la propriété de périodisation avec le peigne de Dirac et le produit de convolution, nous avons l'autre expression équivalente suivante :

$$i_{T_e, \tau}(t) = \Pi_{\tau}(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \Pi_{\tau}(t) * \text{Pgn}_{T_e}(t)$$

Le spectre de ce signal s'exprime donc par :

$$I_{T_e, \tau}(f) = \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau k f} \right] \cdot [F_e \cdot \text{Pgn}_{F_e}(f)] = \tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau k f} \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF_e)$$

soit :

$$I_{T_e, \tau}(f) = \tau \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi \tau k F_e)}{\pi \tau k F_e} \cdot \delta(f - kF_e) \quad (7.11)$$

a) Échantillonnage naturel

Dans le cas de l'échantillonnage naturel, l'amplitude de chaque impulsion suit la valeur de la fonction pendant l'intervalle τ . D'un point de vue représentation mathématique du signal échantillonné, nous avons le produit du signal initial par la fonction « porte » périodisée précédemment établie :

$$s_e(t) = s(t) \cdot i_{T_e, \tau}(t) = s(t) \cdot [\Pi_{\tau}(t) * \text{Pgn}_{T_e}(t)] \quad (7.12)$$

En utilisant la relation 7.11, le spectre $S_e(f)$ de $s_e(t)$ s'exprime par la relation suivante :

$$S_e(f) = S(f) * I_{T_e, \tau}(f) = S(f) * \left[\tau \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi \tau k F_e)}{\pi \tau k F_e} \cdot \delta(f - kF_e) \right]$$

d'où

$$S_e(f) = \tau \cdot F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi \tau k F_e)}{\pi \tau k F_e} \cdot S(f - kF_e) \quad (7.13)$$

L'intérêt essentiel de l'étude est de savoir si cet échantillonnage dit naturel provoque une déformation du spectre par rapport à l'échantillonnage idéal qui lui permet de récupérer le spectre du signal initial par un filtre passe-bas de largeur F_e et donc de conserver la totalité de l'information contenue dans le signal initial. À partir de la

relation précédente 7.13, il est facile d'obtenir la relation, liant le spectre de base du signal échantillonné $S_{e0}(f)$ et celui du signal $S(f)$, soit :

$$S_{e0}(f) = \tau \cdot F_e \cdot S(f) \quad (7.14)$$

Cette relation 7.14 montre que, dans le cas de l'échantillonnage naturel (avec une impulsion de largeur non nulle), il est possible d'obtenir le spectre du signal initial avec un filtre passe-bas idéal. La proportionnalité entre les deux spectres montre que l'échantillonnage naturel n'introduit pas de déformation. Cet échantillonnage correspond simplement à une augmentation de la durée d'observation du signal.

Cet échantillonnage étant non réalisable pratiquement, nous devons étudier un cas où non seulement la durée d'observation est augmentée, mais aussi la valeur de l'échantillon est approchée sur cette durée : valeur initiale ou valeur moyenne.

b) Échantillonnage régulier ou bloqueur

Dans le cas de l'échantillonnage régulier, l'amplitude de chaque impulsion est constante et égale à l'amplitude du signal initial au temps nT_e . Ce mode correspond au cas pratique le plus souvent mis en œuvre. La représentation mathématique du signal échantillonné peut être mise sous la forme d'une suite infinie de fonctions « porte » d'amplitude égale aux échantillons du signal, soit :

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [s(kT_e) \cdot \Pi_\tau(t - kT_e)] \quad (7.15)$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme suivante :

$$s_e(t) = [s(t) \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t)] * \Pi_\tau(t) \quad (7.16)$$

En exprimant la relation 7.16 dans l'espace des fréquences, le spectre $S_e(f)$ de $s_e(t)$ s'exprime par la relation suivante :

$$S_e(f) = [S(f) * (F_e \cdot \text{Pgn}_{F_e}(f))] \cdot \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right]$$

soit

$$S_e(f) = \tau \cdot F_e \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kF_e) \quad (7.17)$$

De la même manière que précédemment, le spectre initial est extrait par un filtre passe-bas de largeur F_e ; la relation, liant le spectre de base du signal échantillonné $S_{e0}(f)$ et celui du signal $S(f)$, est (figure 7.12, page ci-contre) :

$$S_{e0}(f) = \tau \cdot F_e \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot S(f) \quad (7.18)$$

Outre le facteur $\tau \cdot F_e$, le spectre $S_{e0}(f)$ n'est pas identique au spectre initial $S(f)$ puisque son amplitude est modulée par la fonction $\text{sinc}(\tau f)$. L'échantillonnage régulier introduit donc une déformation par rapport à l'échantillonnage idéal ou naturel. Cette distorsion reste petite dans le cas où la durée de la porte d'échantillonnage est faible devant la période d'échantillonnage.

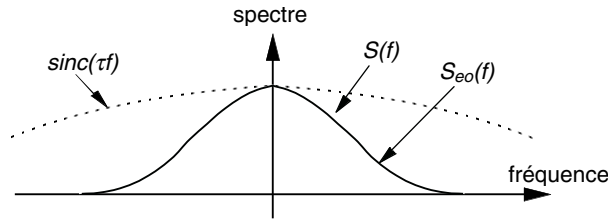


Figure 7.12. Illustration de la distortion du spectre dans le cas d'un échantillonnage régulier ou moyennneur.

Exemple. Pour une fréquence d'échantillonnage de 20 kHz et une durée de l'impulsion d'échantillonnage de 5 μ s (rapport de 10), la distortion sur le spectre à la fréquence de 1 kHz n'est que de 2 %.

c) Échantillonnage moyennneur

L'échantillonneur moyennneur donne des échantillons $s_e(kT_e)$ correspondant à la valeur moyenne de $s(t)$ prise sur la durée de l'impulsion τ . Ainsi l'échantillon k s'exprime sous la forme suivante :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_{kT_e - \tau/2}^{kT_e + \tau/2} s(t) dt$$

En utilisant la fonction porte, la relation précédente peut s'écrire de la façon suivante :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_{kT_e - \tau/2}^{kT_e + \tau/2} \Pi_{\tau}(t - kT_e) \cdot s(t) \cdot dt$$

Cette expression représente le produit de convolution de $s(t)$ et de $\Pi_{\tau}(t)$ au temps kT_e , d'où :

$$s_e(kT_e) = \frac{1}{\tau} \cdot [\Pi_{\tau}(t) * s(t)] \cdot \delta(t - kT_e)$$

Le signal échantillonné complet $s_e(t)$ va donc s'exprimer sous la forme suivante :

$$s_e(t) = \frac{1}{\tau} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\Pi_{\tau}(t) * s(t)] \cdot \delta(t - kT_e)$$

soit

$$s_e(t) = \frac{1}{\tau} \cdot [\Pi_{\tau}(t) * s(t)] \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t) \quad (7.19)$$

À partir de la relation 7.19, le spectre $S_e(f)$ de $s_e(t)$ s'obtient par transformation de Fourier en utilisant le théorème de Plancherel :

$$S_e(f) = \frac{1}{\tau} \cdot \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot S(f) \right] * [F_e \cdot \text{Pgn}_{F_e}(f)]$$

soit

$$S_e(f) = F_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\tau(f - kF_e))}{\pi\tau(f - kF_e)} \cdot S(f - kF_e) \quad (7.20)$$

De la même manière que précédemment, le spectre initial est extrait par un filtre passe-bas de largeur F_e ; la relation, liant le spectre de base du signal échantillonné $S_{e0}(f)$ et celui du signal $S(f)$, est :

$$S_{e0}(f) = F_e \cdot \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \cdot S(f) \quad (7.21)$$

Nous retrouvons un résultat très proche de celui obtenu pour l'échantillonnage régulier. Outre le facteur F_e , le spectre $S_{e0}(f)$ n'est pas identique au spectre initial $S(f)$ puisque son amplitude est modulée par la fonction sinc(τf) comme pour l'échantillonnage régulier et introduit donc une déformation par rapport à l'échantillonnage idéal ou naturel (figure 7.12, page précédente).

Remarque : Il est important de noter que les échantillonnages bloqueur et moyenneur seront d'autant plus proches de l'échantillonnage idéal que la durée de l'impulsion d'échantillonnage sera faible devant la période du signal correspondant à la fréquence maximale contenue dans le signal échantillonné.

7.2 QUANTIFICATION DU SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ

7.2.1 Quantification

Quantifier une valeur x réelle quelconque, c'est remplacer cette valeur par une valeur x_q appartenant à un ensemble dénombrable de valeurs entières suivant une certaine loi : arrondi au plus proche voisin, arrondi par défaut, etc.

Ainsi les échantillons temporels $s_e(kT_e)$, représentant les valeurs de l'amplitude de $s(t)$ aux instants kT_e , sont quantifiés pour donner des échantillons $s_{e,q}(kT_e)$. Dans le cas d'une quantification dite uniforme, l'amplitude maximale du signal est découpée en N intervalles identiques de valeur q . La valeur du signal échantillonné quantifié est définie par :

$$s_{e,q}(kT_e) = N \quad \text{si} \quad Nq - \frac{q}{2} \leq s_e(kT_e) < Nq + \frac{q}{2}$$

Le circuit électronique, réalisant cette fonction est un convertisseur analogique-numérique. La fonction de transfert de ce circuit, exprimant le résultat de la relation ci-dessus, est représentée dans un plan signal quantifié en fonction de l'amplitude du signal (figure 7.13, page ci-contre).

L'erreur de quantification ε pour une quantification uniforme dans le cas de l'arrondi au plus proche voisin est égale au demi-pas de quantification $q/2$ (figure 7.14, page ci-contre).

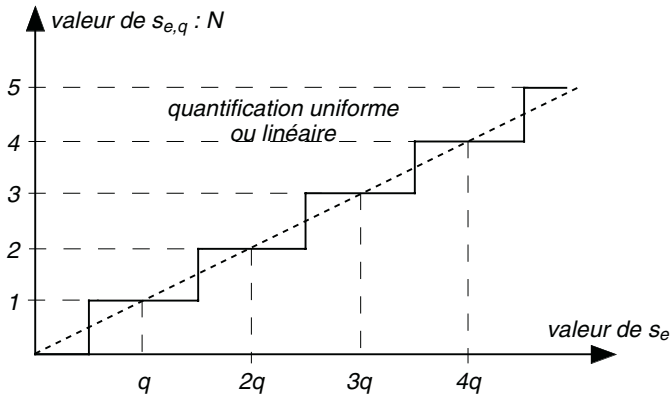


Figure 7.13. Courbe de transfert d'un quantificateur uniforme ou linéaire.

Si on étudie l'évolution de l'erreur de quantification $\varepsilon(t)$ en fonction du temps et pendant un temps suffisamment grand θ où l'amplitude du signal varie sur une plage importante par rapport au pas de quantification q , cette erreur peut être approximée par une droite, représentant l'équi-répartition de l'erreur :

$$\varepsilon(t) = q \cdot \frac{t}{\theta} \quad \text{pour} \quad -\frac{\theta}{2} \leq t < \frac{\theta}{2}$$

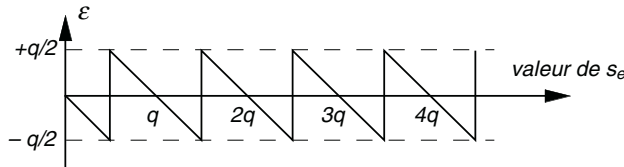


Figure 7.14. Évolution de l'erreur de quantification associée à la courbe de transfert d'un quantificateur uniforme ou linéaire.

La valeur moyenne de $\varepsilon(t)$ est nulle sur cet intervalle, par contre la puissance moyenne est donnée par :

$$P_\varepsilon = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \varepsilon^2(t) \cdot dt = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \left[q \frac{t}{\theta} \right]^2 \cdot dt = \frac{q^2}{12}$$

Ce calcul peut être effectué en considérant que la tension de l'erreur de quantification ε , qui est une variable aléatoire, a une densité de probabilité $p(\varepsilon)$ constante et égale à $1/q$ sur l'intervalle $[-q/2, +q/2]$. Si nous calculons la valeur quadratique moyenne ou moment d'ordre, nous retrouvons le résultat précédent :

$$E_{sp}[\varepsilon^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \cdot p(\varepsilon) \cdot d\varepsilon = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} \varepsilon^2 \cdot d\varepsilon = \frac{q^2}{12} = P_\varepsilon$$

Ce bruit de quantification est une variable aléatoire stationnaire et ergodique. Il est important de noter que le processus de quantification est quasiment équivalent à l'addition au signal d'un bruit uniforme. Étant donné la puissance P_e , le bruit de quantification peut être considéré comme un bruit blanc de largeur spectrale $[0, F_e/2]$. La densité spectrale est donc donnée par : $q^2/(6F_e)$.

Concernant le signal, nous allons considérer un signal sinusoïdal $s(t)$ d'amplitude maximale $V_{\max}$ et de période T . Pour un système de codage sur n bits (valeur maximale de codage $2^n - 1$), le signal sinusoïdal $s(t)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$s(t) = V_{\max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{avec} \quad V_{\max} = \frac{2^n - 1}{2}q$$

La puissance moyenne de ce signal est donc :

$$P_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{V_{\max}^2}{2}$$

Soit en supposant n grand ($2^n \gg 1$), il vient :

$$P_s \approx 2^{2n-3} \cdot q^2$$

Étant donné P_s la puissance crête de la sinusoïde d'amplitude maximale codable sans écrêtage et P_e la puissance du bruit de quantification, le système a une dynamique par rapport au bruit de quantification définie par :

$$D(\text{dB}) = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e} = 6,02n + 1,76$$

On peut ainsi remarquer que rajouter 1 bit revient à augmenter la dynamique de 6 dB. En conclusion, on choisira le pas de quantification q en fonction de la précision désirée lors de la conversion et le nombre de bits n en fonction de la dynamique.

7.2.2 Lois de compression-expansion du signal

L'erreur relative due à la quantification n'est pas constante le long de la courbe de transfert, c'est-à-dire suivant la valeur de la grandeur quantifiée. Cette erreur, égale à $q/s_{e,q}$, est très faible pour des valeurs grandes de $s_{e,q}$ et devient très importante pour des valeurs faibles : 50 % pour $s_{e,q} = q$. Pour égaliser cette erreur, il est possible de réaliser un codage non linéaire ou un codage à erreur constante, en faisant précéder la quantification du signal d'une « compression » du signal dans le sens analogique-numérique et d'une « expansion » dans le sens numérique-analogique.

Dans le cas des signaux de la parole, deux lois sont utilisées : la loi appelée μ aux États-Unis et la loi dénommée A en Europe, normalisée par le CCITT (Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique). Les courbes correspondant à la loi A sont représentées sur la figure 7.15, page ci-contre. Les circuits

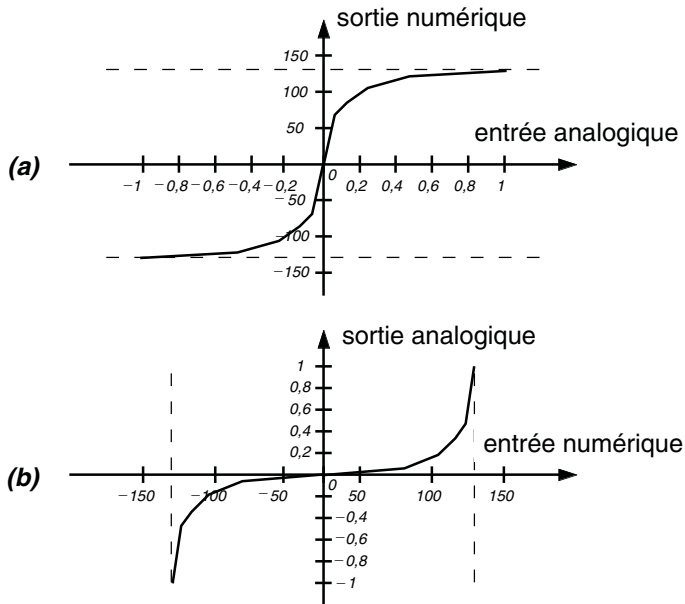


Figure 7.15. Lois A de compression et d'expansion. Loi de compression (a) : sortie numérique variant de -128 à 128 en fonction de l'entrée analogique variant de -1 à $+1$. Loi d'expansion (b) : sortie analogique variant entre -1 et $+1$ en fonction de l'entrée numérique variant de -128 à 128 .

qui réalisent ces fonctions s'appellent des *compandeurs* et les circuits qui réalisent l'échantillonnage, la compression, l'expansion et aussi la quantification s'appellent des *codecs*.

7.3 RESTITUTION DU SIGNAL

7.3.1 Problématique

La restitution du signal a pour but de redonner un signal continu temporellement à partir de valeurs discrètes connues à des instants kT_e , T_e étant la période d'échantillonnage. Pour reconstituer la continuité du signal, il faut effectuer une *interpolation* entre deux instants de discrétisation. Cette interpolation sera précédée du système permettant de transformer un nombre binaire représentant l'amplitude d'un signal à un instant donné en une valeur continue en amplitude, procédé inverse de la quantification. Il est important de remarquer que, dans ce cas, la transformation du code numérique (ensemble fini de valeurs) en une valeur analogique ne produit aucune erreur sur le signal contrairement au processus de quantification.

À partir des échantillons $s_e(kT_e)$, ce circuit, appelé convertisseur numérique-analogique, donne un signal analogique $s(t)$ (figure 7.16, page suivante). Mais on souhaite une restitution plus continue qui puisse représenter plus fidèlement la forme analogique du signal, telle qu'elle aurait été obtenue avec un système de traitement

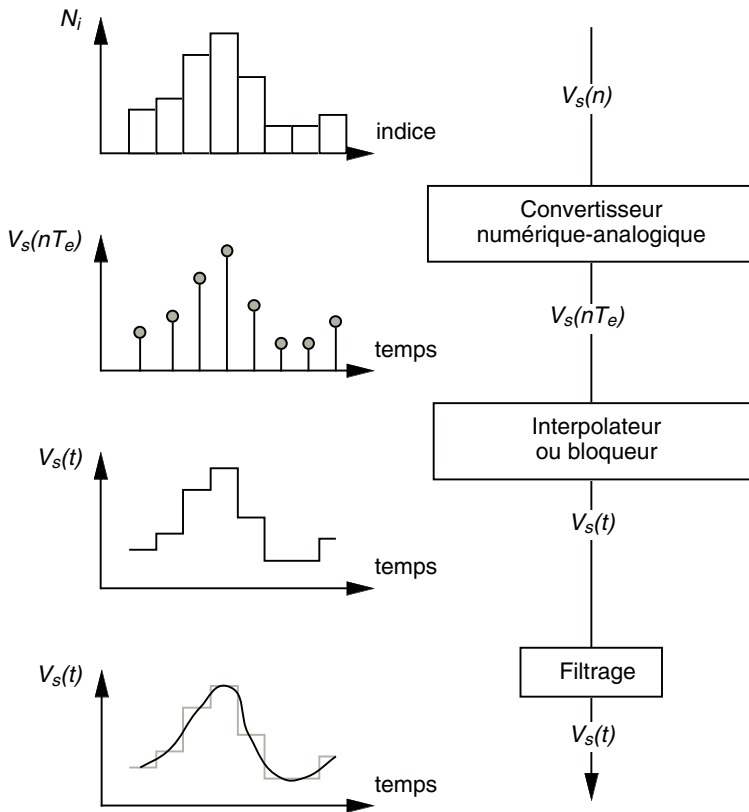


Figure 7.16. Chaîne de restitution d'un signal échantillonné.

analogique. Aussi on procède à une interpolation suivie d'un filtrage. Le rythme de la restitution, définie par la période T_s , est bien entendu fonction de la période d'échantillonnage T_e du signal.

Cette question de la restitution peut se poser sous la même forme que celle étudiée au paragraphe 7.1.1. Connaissant le spectre du signal échantillonné, la restitution consiste à extraire de ce spectre le spectre de base à l'aide d'un filtrage fréquentiel ou d'un calcul équivalent sur les échantillons du signal.

7.3.2 Interpolation idéale

L'interpolation parfaite consiste à utiliser l'interpolation de Shannon. En effet la relation 7.9, démontrée au paragraphe 7.1.1, permet d'obtenir le signal initial $s(t)$ avec les seuls échantillons $s(kT_e)$ aux instants kT_e :

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \frac{\sin(\pi F_e(t - kT_e))}{\pi F_e(t - kT_e)}$$

Cette méthode consiste à effectuer la somme des fonctions $\text{sinc}(x)$ relatives à chaque point de l'échantillonnage, en les pondérant de la valeur de l'amplitude de ces

points. Cette interpolation idéale exprime la reconstitution d'un signal analogique de spectre borné à partir du signal échantillonné suivant la base constituée par la famille de fonctions (figure 7.17) :

$$\left\{ \frac{\sin(\pi F_e(t - kT_e))}{\pi F_e(t - kT_e)} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

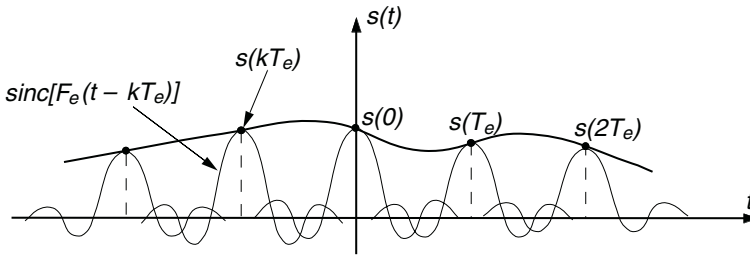


Figure 7.17. Reconstitution parfaite d'un signal échantillonné.

Mais l'interpolation idéale en temps réel est difficilement réalisable, car la formule d'interpolation précédente ne satisfait pas à la condition de causalité, en effet, comme nous l'avons vu cette interpolation correspond au filtrage par une fonction fréquentielle de type porte (filtre idéal non réalisable).

Malgré cette difficulté théorique, cette interpolation est utilisée dans les applications nécessitant une grande qualité de restitution en limitant la sommation : oscilloscopes numériques de haute gamme ou restitution des signaux sonores issus des disques CD-audio (exemple du chapitre suivant).

7.3.3 Interpolation linéaire

Le problème inverse consiste à considérer que le lissage du signal crnelé sera effectué par un filtrage passe-bas simple du 1^{er} ou 2^e ordre qui revient à réaliser en première approximation une interpolation linéaire. Cette hypothèse étant faite, il s'agit alors de déterminer la distance minimale qui doit séparer dans le temps deux échantillons successifs pour que, à partir de ces points, on puisse reconstituer « correctement » le signal au moyen d'une interpolation linéaire. Pour perdre le moins possible d'information contenue dans le signal, il faut augmenter la cadence d'échantillonnage par rapport à la fréquence théorique de Shannon, c'est-à-dire sur-échantillonner le signal. C'est une pratique assez coûteuse, car elle conduit à un accroissement important des échantillons à traiter.

La fréquence d'échantillonnage ou de sur-échantillonnage va dépendre à la fois de la méthode d'interpolation et de l'erreur que l'on tolère sur le signal reconstitué à partir des échantillons. Dans le cas de l'interpolation linéaire simple (identique à l'opération que l'on réalise lorsque l'on joint les points expérimentaux pour obtenir un graphique continu), l'erreur sur le signal $s(t)$ par rapport au signal reconstitué $s_r(t)$

est :

$$\varepsilon = \frac{s(t) - s_r(t)}{s(t)}$$

Prenons l'exemple d'un signal sinusoïdal pur de période T_0 ; cette erreur est maximale pour les sommets de la fonction, c'est-à-dire pour $t = T_0/4$, et avec deux points échantillonnés de part et d'autre de ce sommet (figure 7.18). Le point que l'on cherche à interpoler est $s(T_0/4) = 1$.

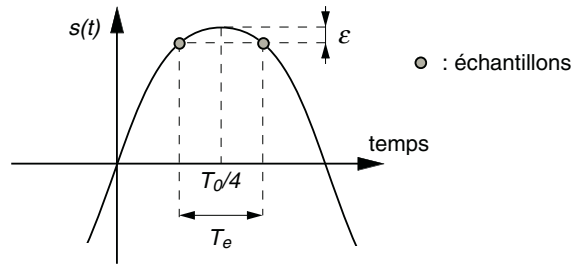


Figure 7.18. Erreur maximale dans le cas d'une interpolation linéaire d'un signal sinusoïdal échantillonné.

Étant donné une période d'échantillonnage de T_e , les points échantillonnés $s_r(t)$ de part et d'autre du sommet ont une amplitude identique égale à :

$$s_r\left(\frac{T_0}{4} \pm \frac{T_e}{2}\right) = \sin\left[\frac{2\pi}{T_0} \cdot \left(\frac{T_0}{4} \pm \frac{T_e}{2}\right)\right]$$

Donc, l'erreur ε est donnée par :

$$\varepsilon = 1 - \sin\left[\frac{2\pi}{T_0} \cdot \left(\frac{T_0}{4} - \frac{T_e}{2}\right)\right] = 1 - \cos\left[\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_e}{2}\right]$$

En utilisant le développement de la fonction cos au premier ordre ($\cos(x) = 1 - x^2/2$), il vient :

$$\varepsilon = \frac{\pi^2}{2} \cdot \left(\frac{T_e}{T_0}\right)^2$$

Il est intéressant d'exprimer ce résultat sous la forme de la valeur minimale de la fréquence d'échantillonnage F_e à utiliser pour un signal de fréquence donnée F_0 pour obtenir une erreur inférieure à ε , soit :

$$F_e \geq F_0 \frac{2,2}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Si on admet une erreur de 1 %, la fréquence d'échantillonnage doit être $22F_0$. Ainsi pour obtenir une qualité de reconstitution correcte, il est nécessaire d'utiliser un sur-échantillonnage de 11 fois supérieur à la fréquence d'échantillonnage donnée par le théorème de Shannon. Il est très important de noter que, pour réaliser une restitution correcte, sans avoir recours à un filtrage très fort (proche du filtrage idéal), une solution consiste donc à prendre une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus grande que la fréquence d'échantillonnage limite du théorème de Shannon.

7.3.4 Restitution par bloqueur

La restitution par bloqueur, illustrée sur la figure 7.16, page 160, correspond, d'un point de vue représentation mathématique, à l'échantillonnage régulier ou bloqueur dans le cas particulier où la durée de l'impulsion τ est égale à T_e (paragraphe 7.1.3). Par conséquent, le spectre du signal en sortie du bloqueur est donné par la relation suivante (équation 7.16) :

$$S(f) = \frac{\sin(\pi T_e f)}{\pi T_e f} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kF_e)$$

Le spectre initial du signal échantillonné est déformé de façon importante par la fonction sinc de pseudo-période F_e (figure 7.19). Aussi pour isoler le spectre de base, correspondant à $k = 0$, il n'est plus nécessaire d'avoir un filtre idéal à front raide car la déformation du spectre par le système bloqueur atténue déjà fortement les spectres latéraux.

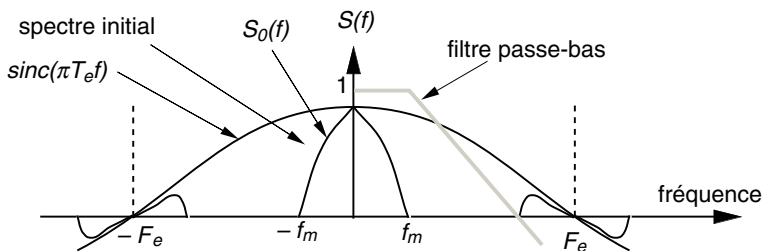


Figure 7.19. Déformation du spectre du signal obtenu par restitution par bloqueur.

Cette déformation conduit à une atténuation du spectre d'autant plus importante que le produit $T_e \cdot f_m$ sera plus grand avec T_e durée des paliers constants et f_m la fréquence maximum du signal initial (tableau 7.1). On retrouve encore une règle identique au cas précédent de l'interpolation linéaire : la déformation (0,14 dB) devient négligeable si on considère une fréquence d'échantillonnage supérieure à 10 fois la fréquence maximale du signal.

TABLEAU 7.1. Valeur de l'affaiblissement en dB en fonction du produit $T_e \cdot f_m$.

Produit $T_e \cdot f_m$	Affaiblissement (en dB) : $20 \log \left(\frac{\sin(\pi T_e f_m)}{\pi T_e f_m} \right)$
0,1	0,14
0,2	0,58
0,3	1,33
0,4	2,42
0,5	3,92 ($f_m = F_e/2$)
0,7	9,69 ($f_m > F_e/2$)

7.3.5 Filtre de restitution

Le filtre de restitution sera calculé de la même manière que le filtre anti-repliement étudié au paragraphe 7.1.2. Pour une atténuation désirée A entre la dernière composante du signal à f_m et la première composante du spectre à éliminer à $F_e - f_m$, la pente du filtre p , en dB/octave, est (équation 7.10) :

$$p = \frac{A \log 2}{\log \left[\frac{F_e - f_{\max}}{f_{\max}} \right]}$$

$$= \frac{A \log 2}{\log(n - 1)}$$

Pour le calcul des caractéristiques du filtre, il est nécessaire de tenir compte des atténuations du spectre obtenu après interpolation ou blocage comme nous l'avons étudié dans le paragraphe précédent.

Exemple. Considérons une restitution avec bloqueur pour un signal de fréquence maximale 10 kHz et une fréquence de restitution (échantillonnage) de 40 kHz ($F_e = 4f_m$). Soient les conditions imposées suivantes : le filtrage passe-bas désiré doit atténuer au maximum de 1 dB à la fréquence maximale f_m du signal et d'au moins 50 dB pour la fréquence à éliminer $F_e - f_m$. Comme nous l'avons vu, la restitution avec bloqueur atténue déjà le spectre par la fonction sinc, soit :

- à f_m : $\text{sinc}(1/4) = 0,9$ ou $-0,9$ dB
- à $F_e - f_m$: $\text{sinc}(3/4) = 0,3$ ou $-10,5$ dB

En conséquence, le filtre de restitution doit introduire un affaiblissement au plus de 0,1 dB à f_m et d'au moins 39,5 dB à $F_e - f_m$, soit une atténuation A de 39,4 dB. En appliquant la relation précédente, la pente du filtre est :

$$p = \frac{39,4 \log 2}{\log 3} \approx 24 \text{ dB/octave}$$

Nous obtenons ainsi un filtre de restitution du 4^e ordre. Si nous n'avions pas pris en compte l'atténuation due à l'interpolation par bloqueur, l'atténuation de 49 dB nécessaire aurait conduit à mettre en place un filtre de pente $p \approx 30$ dB/octave, soit un filtre du 5^e ordre.

En conclusion, nous pouvons remarquer que deux paramètres ont une influence prépondérante sur la qualité de la restitution : la fréquence d'échantillonnage utilisée et les caractéristiques du filtre de restitution. La fréquence d'échantillonnage doit être la plus petite possible pour des raisons de limitation du nombre d'échantillons, mais par contre l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage ou sur-échantillonnage permet de s'affranchir de la réalisation d'un filtre complexe. Comme nous le verrons dans l'exemple du paragraphe suivant, un compromis entre ces deux paramètres est la solution la plus efficace.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 7.1 (Échantillonnage des signaux à bande étroite)

On considère un signal $s(t)$ de largeur spectrale 0 à f_m . Afin de pouvoir transmettre ce signal porteur d'informations, on réalise la modulation d'amplitude d'une onde porteuse de fréquence f_p telle que $f_p \gg f_m$.

Déterminer le spectre du signal modulé en amplitude $S_{\text{OMA}}(f)$. Calculer la fréquence d'échantillonnage F_e nécessaire à l'acquisition de ce signal modulé en amplitude.

Afin de limiter le nombre d'échantillons à acquérir, on étudie la possibilité d'échantillonner le signal à une fréquence F_s plus faible que F_e . Déterminer les conditions que doit remplir cette nouvelle fréquence d'échantillonnage F_s par rapport aux deux fréquences f_p et f_m pour que cet échantillonnage soit correct. L'application numérique de l'exercice est : $f_m = 5$ kHz et $f_p = 100$ kHz.

Solution

La figure 7.20 représente le spectre $S(f)$ du signal $s(t)$ de largeur spectrale 0 à f_m . Ce signal est transmis à l'aide d'une modulation d'amplitude dont les principes ont été décrits dans le chapitre 5.2. Le spectre du signal modulé en amplitude $S_{\text{OMA}}(f)$ est représenté sous forme bilatérale sur la figure 7.21, page suivante.

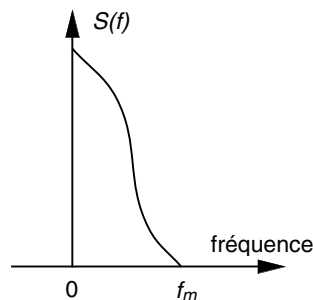


Figure 7.20. Spectre du signal $s(t)$ à transmettre par modulation d'amplitude.

Il est important de noter la faible bande spectrale occupée par ce spectre étant donné les valeurs relatives des fréquences du signal à transmettre et de l'onde porteuse. Nous sommes ici en présence d'un signal dit à bande étroite. Ainsi les deux parties du spectre $S^-(f)$ et $S^+(f)$ occupent une largeur spectrale de $2f_m$. Mais la fréquence maximale contenue dans le signal est $f_p + f_m$.

Considérons l'exemple numérique correspondant en ordre de grandeur à une émission radio-phonique en modulation d'amplitude, soit $f_m = 5$ kHz et $f_p = 100$ kHz.

Désirant réaliser l'acquisition de ce signal, la première étape consiste à déterminer la fréquence d'échantillonnage F_e nécessaire et de minimiser celle-ci autant que possible pour diminuer le

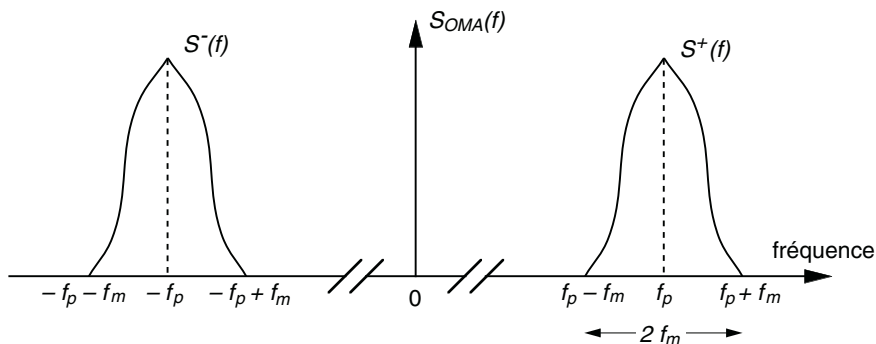


Figure 7.21. Spectre de l'onde modulée en amplitude par le signal représenté sur la figure 7.20, page précédente.

nombre d'échantillons. Mais la limite inférieure est donnée par le théorème de Shannon, qui, dans cet exemple se traduit par :

$$F_e \geq 2 \cdot (f_p + f_m) \quad \text{soit} \quad F_e = 210 \text{ kHz}$$

Cette limite inférieure de la fréquence d'échantillonnage serait totalement justifiée dans le cas où le signal aurait une largeur spectrale effectivement occupée correspondant à $[0, f_p + f_m]$. Or, dans cet exemple d'un signal à bande étroite, ce n'est pas le cas. Aussi, nous pouvons nous poser la question de savoir s'il serait possible de prendre une fréquence d'échantillonnage inférieure à la limite F_e déterminée par le théorème de Shannon. Considérons cette nouvelle fréquence F_s , dite de sous-échantillonnage, avec $F_s < F_e$. Nous allons étudier les conséquences de ce sous-échantillonnage qui va obligatoirement produire l'effet néfaste du repliement.

Nous savons que l'échantillonnage se concrétise par une périodisation du spectre avec une période de répétition F_s . Comme cette fréquence F_s est inférieure à la fréquence de Shannon, le phénomène de repliement va se produire. Pour éviter ce problème et ainsi pouvoir récupérer le signal initial après échantillonnage, il faut choisir correctement cette fréquence de sous-échantillonnage (figure 7.22).

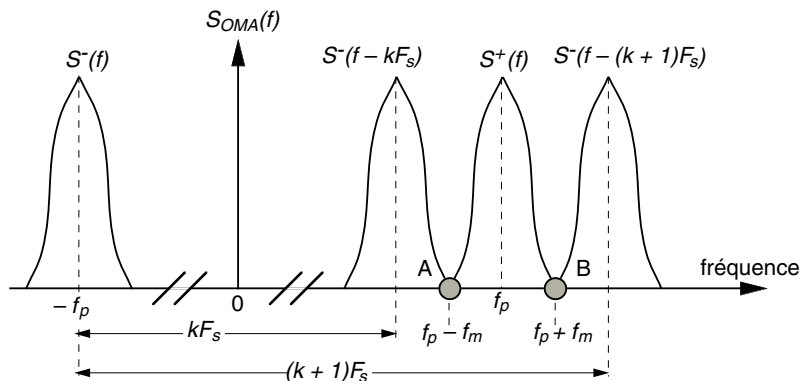


Figure 7.22. Visualisation des conditions nécessaires pour éviter un repliement de spectre dans le cas du sous-échantillonnage.

Une première condition est le non-chevauchement du spectre $S^+(f)$ lors de la périodisation ; cette condition s'exprime par : $F_s = 2f_m$.

Comme nous allons le voir, cette condition sera largement respectée. La deuxième condition est le non-chevauchement du spectre $S^-(f)$ sur le spectre $S^+(f)$ lors de la périodisation ; celle-ci s'exprime par les conditions sur les positions relatives des spectres au point A et B (figure 7.22, page ci-contre) :

- au point A : $-f_p + f_m + k \cdot F_s \leq f_p - f_m$
- au point B : $-f_p - f_m + (k + 1) \cdot F_s \leq f_p + f_m$

Ces inégalités se résument par l'encadrement de la valeur de la fréquence de sous-échantillonnage F_s suivante :

$$\frac{2(f_p + f_m)}{k + 1} \leq F_s \leq \frac{2(f_p - f_m)}{k}$$

En considérant ces inégalités, la valeur maximale de k s'exprime en considérant un intervalle nul de choix de la fréquence F_s , soit :

$$k_{\max} = \frac{f_p - f_m}{2f_m}$$

Pour cette valeur de $k_{\max}$, la fréquence de sous-échantillonnage est égale à $4f_m$.

Dans le cadre de l'application numérique définie, nous avons $k_{\max} = 9,5$. Donc la plus grande valeur possible pour k étant entier est 9.

On peut écrire aussi que la distance spectrale entre les deux spectres $S^-(f)$ périodisés doit être supérieure à $2f_m$, soit

$$[-f_p - f_m + (k + 1) \cdot F_s] - [-f_p + f_m + k \cdot F_s] \geq 2 \cdot f_m \quad \text{ou} \quad F_s \geq 4 \cdot f_m$$

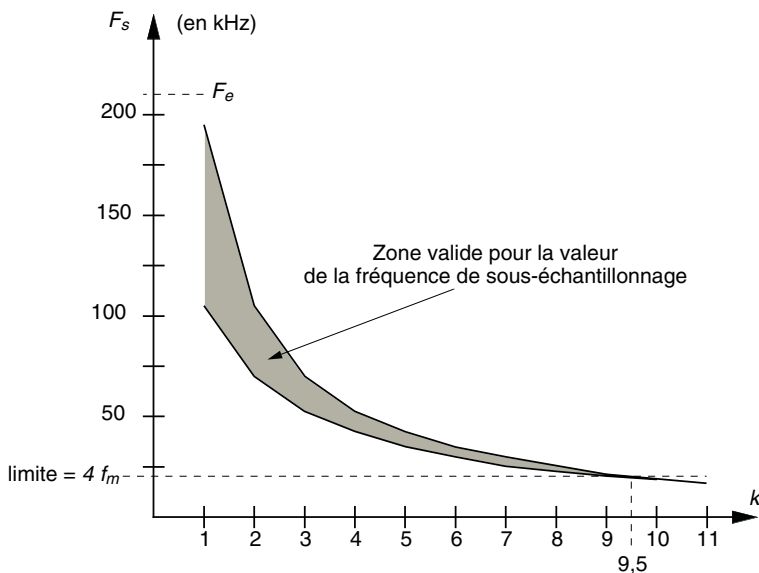


Figure 7.23. Détermination de la valeur de la fréquence de sous-échantillonnage F_s .

Ainsi pour déterminer la valeur de F_s , nous avons d'une part une valeur minimale donnée par la dernière condition et ensuite un encadrement de cette valeur en fonction du paramètre k . La zone des valeurs possibles de F_s , qui permet de respecter les inégalités préalablement établies, est représentée sur la figure 7.23, page précédente. Plus le nombre k sera grand et plus la fréquence de sous-échantillonnage F_s sera faible, limitant ainsi le nombre d'échantillons. Si l'on considère l'exemple numérique précédent, la valeur de k maximale est de 9 pour laquelle et nous avons l'encadrement de la valeur F_s :

$$21\,000\text{ Hz} \leq F_s \leq 21\,110\text{ Hz}$$

Le choix de la valeur est fixé d'une part par une fréquence proche de la fréquence limite de 20 kHz pour avoir la solution la plus performante. D'autre part il est nécessaire de réaliser un oscillateur très stable (par exemple un oscillateur à verrouillage de phase) afin d'assurer le maintien de la fréquence dans l'encadrement choisi.

Exercice 7.2 (Restitution par sur-échantillonnage)

Un exemple de restitution de signaux numériques avec sur-échantillonnage est donné par l'enregistrement et la diffusion des signaux audio sur le support disque optique : CD audio (Compact Disk). La fréquence d'échantillonnage F_e des signaux enregistrés a été fixée, par normalisation internationale, à 44,1 kHz. La quantification du signal est réalisée sur 16 bits. Par un filtre anti-repliement, le signal enregistré est limité à la fréquence de $F_m = 20\text{ kHz}$. Le signal, numérisé et enregistré sur le support CD, est composé d'échantillons, correspondant à des temps de mesure T_e de 22,68 μs ($T_e = 1/F_e$), avec un spectre périodique de période F_e .

Les caractéristiques de cette numérisation étant données, la reproduction de ce signal doit mettre en œuvre d'une part une conversion numérique-analogique et d'autre part une sortie de cette valeur à une fréquence permettant une restitution la plus correcte possible. L'analyse de cette correction de la restitution est faite sur la base d'un signal de sortie identique au signal d'entrée qui a été enregistré. En particulier le spectre du signal de sortie doit être identique ou proche du spectre du signal d'entrée.

Dans le cas d'une reconstitution directe en utilisant un filtre passe-bas, calculer les caractéristiques du filtre pour avoir une extraction du spectre initial avec une atténuation de 100 entre la dernière fréquence utile et la première fréquence de repliement.

Pour éviter la réalisation difficile de ce filtre passe-bas, la technique du sur-échantillonnage va être mise en œuvre. Elle consiste à calculer des échantillons intermédiaires entre deux échantillons réels du signal afin d'obtenir un signal numérique correspondant à une fréquence d'échantillonnage plus grande. Les points étant ainsi plus rapprochés, la reconstitution est alors grandement facilitée.

Dans le cas d'un ajout de 3 échantillons entre deux échantillons initiaux, établir la relation permettant de calculer ces nouveaux échantillons. Puis calculer le filtre passe-bas alors nécessaire à la reconstitution avec le même rapport de 100.

Solution

Un exemple de restitution de signaux numériques avec sur-échantillonnage est donné par l'enregistrement et la diffusion des signaux audio sur le support « disque optique » : CD audio. La fréquence d'échantillonnage F_e des signaux enregistrés a été fixée à 44,1 kHz et la quantification est réalisée sur 16 bits.

Ainsi la chaîne d'enregistrement des signaux sonores sur disques optiques est représentée sur la figure 7.24.

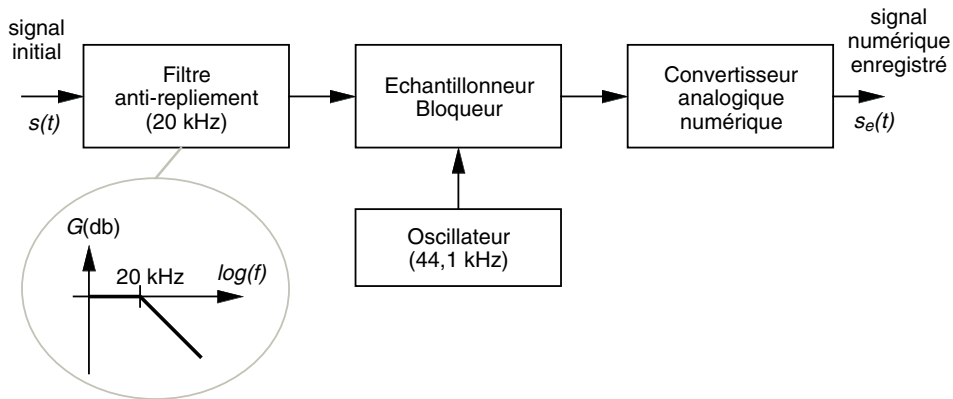


Figure 7.24. Chaîne d'enregistrement d'un signal audio sur disque optique.

Par un filtre anti-repliement, le signal enregistré est limité à la fréquence de $F_m = 20$ kHz. Le signal, numérisé et enregistré sur le support CD, est composé d'échantillons, correspondant à des temps de mesure T_e de 22,68 μs ($T_e = 1/F_e$), avec un spectre périodique de période F_e (figure 7.25, page suivante).

Les caractéristiques de cette numérisation étant données, la reproduction de ce signal doit mettre en œuvre d'une part une conversion numérique-analogique et d'autre part une sortie de cette valeur à une fréquence permettant une restitution la plus correcte possible. L'analyse de cette correction de la restitution est faite sur la base d'un signal de sortie identique au signal d'entrée qui a été enregistré. En particulier le spectre du signal de sortie doit être identique ou proche du spectre du signal d'entrée.

Pour obtenir ce résultat, la première approche consiste à utiliser une fréquence de restitution identique à la fréquence d'échantillonnage. Puis ensuite, pour éliminer les spectres « parasites » dus à la périodisation, il faut mettre en œuvre un filtre permettant d'extraire le spectre du signal initial (cf. figure 7.26, page 171). Ce procédé correspond au principe de l'interpolation idéale. Dans cet exemple, le calcul de la pente du filtre passe-bas à réaliser est obtenu à partir de la relation 7.10.

$$p = \frac{A \log 2}{\log \left[\frac{F_e - F_m}{F_m} \right]} = \frac{40 \log 2}{\log \left(\frac{24,1}{20} \right)} = 148,7 \text{ dB/octave}$$

Ce filtre passe-bas correspond à un filtre du 25^e ordre, c'est-à-dire un filtre extrêmement difficile à réaliser (oscillations, gain non constant sur la bande passante...). En effet cette première méthode est la traduction directe de la relation théorique de reconstitution exacte

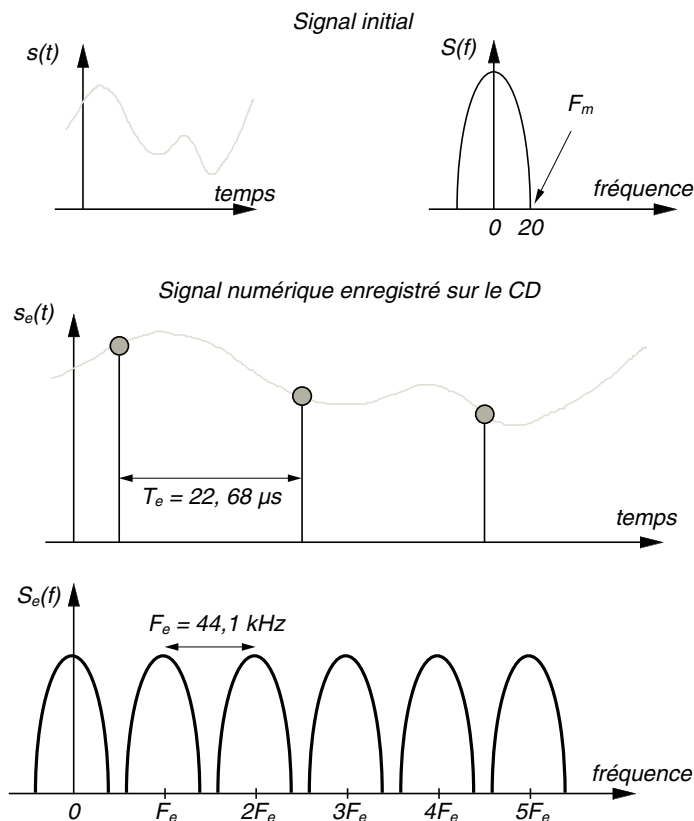


Figure 7.25. Caractéristiques temporelle et spectrale du signal sonore initial à enregistrer et du signal enregistré sur le support CD-audio.

du théorème d'échantillonnage (cf. équation 7.9). Le filtre passe-bas idéal, représenté par la porte de largeur $F_e/2$, est remplacé par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $F_e/2$ et avec une pente aussi grande que possible.

Pour contourner cette difficulté, la technique du sur-échantillonnage va être mise en œuvre. Le principe du sur-échantillonnage est donc de prélever des échantillons du signal à une cadence F'_e supérieure à la limite de Shannon F_e : $F'_e > F_e$. Comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, ce sur-échantillonnage du signal permet ensuite de réaliser beaucoup plus facilement la reconstruction du signal.

Dans l'exemple qui nous intéresse ici, il n'est pas possible de sur-échantillonner le signal puisque les données sont déjà produites et disponibles sur un support fixé. Dans ce cas, la méthode du sur-échantillonnage consiste à *calculer* des échantillons intermédiaires entre deux échantillons réels du signal afin d'obtenir un signal numérique correspondant à une fréquence d'échantillonnage plus grande. Les points étant ainsi plus rapprochés, la reconstitution est alors grandement facilitée. Le calcul des points intermédiaires est basé sur la relation théorique 7.9. Dans l'exemple des signaux audio sur CD, le sur-échantillonnage est réalisé avec une fréquence quadruple : trois échantillons sont calculés entre deux échantillons initiaux connus.

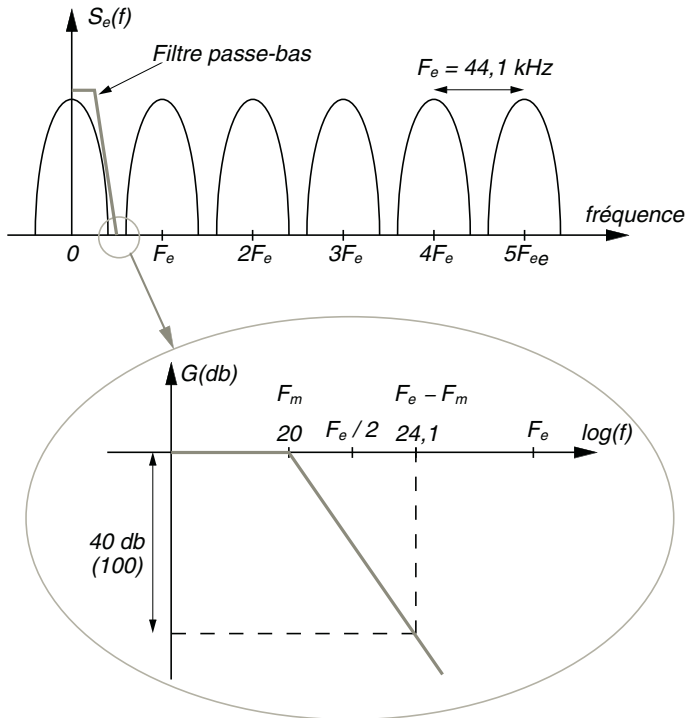


Figure 7.26. Restitution du signal audio par extraction du spectre initial avec un filtre passe-bas : équivalence de l'interpolation idéale.

L'ensemble des échantillons ainsi obtenus, échantillons initiaux et échantillons calculés, forme le nouveau signal sur-échantillonné $s'_e(t)$, ayant quatre fois plus d'échantillons. Ce signal correspond à un échantillonnage du signal initial $s(t)$ qui aurait été réalisé avec la fréquence d'échantillonnage F'_e ($F'_e = 4F_e$). Aussi le spectre $S'_e(f)$ de ce signal sur-échantillonné $s'_e(t)$ est composé du spectre $S(f)$ périodisé avec la fréquence F'_e (figure 7.27, page suivante). Donc, pour obtenir l'expression du spectre $S'_e(f)$ à partir du spectre $S_e(f)$, il suffit d'utiliser un filtre fréquentiel composé d'une porte de largeur F_e et périodisée avec la fréquence F'_e . Soit :

$$S'_e(f) = S_e(f) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_{F_e}(f - kF'_e)$$

Cette équation peut s'exprimer sous la forme équivalente suivante :

$$S'_e(f) = S_e(f) \cdot \left[\Pi_{F_e}(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kF'_e) \right] = S_e(f) \cdot [\Pi_{F_e}(f) * \text{Pgn}_{F'_e}(f)]$$

Cette relation va permettre d'établir la relation exacte de calcul des échantillons intermédiaires en prenant la transformée de Fourier de la relation précédente :

$$s'_e(t) = s_e(t) * \left[F_e \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e t} \cdot T'_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT'_e) \right]$$

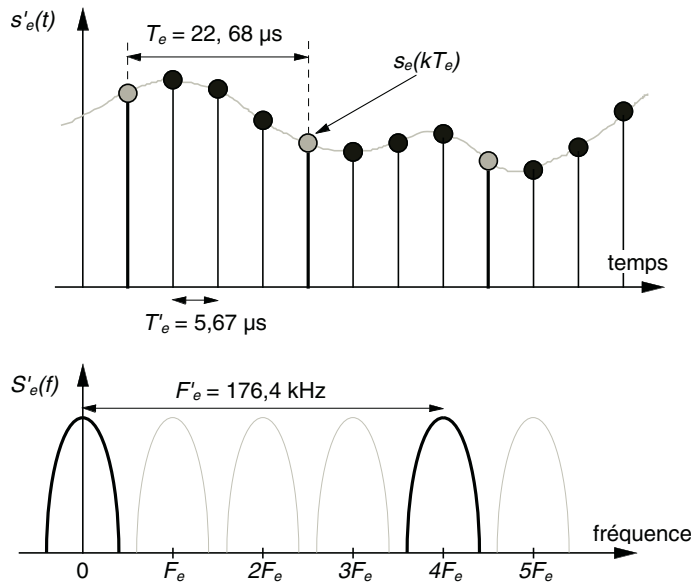


Figure 7.27. Réalisation d'un sur-échantillonnage quadruple et son effet sur le spectre du signal résultant.

En utilisant la relation ($F'_e = 4F_e$), il vient :

$$s'_e(t) = s_e(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi} \delta(t - kT_e/4)$$

En utilisant la relation 7.1 définissant $s_e(t)$, l'échantillon de rang k est calculé à partir de la relation suivante :

$$s'_e(kT'_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_e(nT_e) \cdot \frac{\sin(\pi(k/4 - n))}{\pi(k - 4n)}$$

La seule difficulté de cette technique réside dans le calcul des échantillons entre deux échantillons réels. La relation utilisée, correspondant à une somme infinie, a été tronquée et limitée à 48 valeurs de chaque côté de l'échantillon calculé :

$$s'_e(kT'_e) = \sum_{n=-48}^{+48} s_e(nT_e) \cdot \frac{\sin(\pi(k/4 - n))}{\pi(k - 4n)}$$

Pour réaliser ce calcul, la fonction $\text{sinc}(x)$ a été discrétisée sur 96 valeurs symétriquement par rapport à l'axe des ordonnées, donc sur une durée de $96T'_e = 544,2 \mu\text{s}$. Cette durée correspond à 12 pseudo-périodes T_e de cette fonction. Les coefficients de la relation sont quantifiés sur 12 bits et ensuite stockés en mémoire statique EPROM.

Enfin pour éliminer les spectres « parasites » dus à la périodisation, il faut mettre en œuvre un filtre permettant d'extraire le spectre du signal initial (figure 7.28, page ci-contre). Dans

cet exemple, le calcul de la pente du filtre passe-bas à réaliser est obtenu à partir de la relation 7.10 ; soit pour une atténuation A de 100 (40 dB), il vient :

$$p = \frac{A \log 2}{\log \left[\frac{F'_e - F_m}{F_m} \right]} = \frac{40 \log 2}{\log \left(\frac{156,4}{20} \right)} = 13,5 \text{ dB/octave}$$

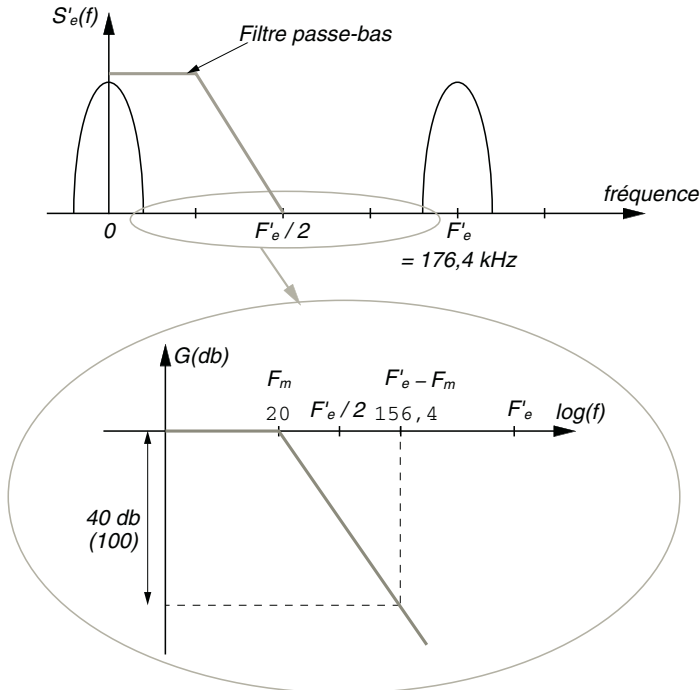


Figure 7.28. Restitution du signal audio par extraction du spectre initial avec un filtre passe-bas : technique du sur-échantillonnage.

Ce filtre passe-bas correspond à un filtre du 2^e ordre, c'est-à-dire un filtre extrêmement facile à réaliser par rapport au cas précédent. Cette technique est donc celle mise en œuvre dans l'ensemble des lecteurs de CD audio actuellement utilisés.

Chapitre 8

Analyse spectrale des signaux discrets

8.1 LES DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS FRÉQUENTIELLES

L'analyse fréquentielle des signaux apporte une information supplémentaire importante. Pour les différents cas de signaux, classés selon les caractéristiques continu ou discret et périodique ou transitoire, la représentation fréquentielle possède des propriétés particulières équivalentes continue ou discrète et périodique ou non périodique (figure 8.1, page suivante). De plus les méthodes, utilisées pour calculer ces représentations spectrales, ne sont pas les mêmes selon ces différents types de signaux (tableau 8.1).

TABEAU 8.1. Correspondance entre les caractéristiques des signaux et des représentations spectrales associées.

Signal	Spectre	
	Méthode de calcul	Caractéristiques
1 – continu et périodique	Série de Fourier	Discret et non périodique
2 – continu et non périodique	Intégrale de Fourier	Continu et non périodique
3 – discret et non périodique	Intégrale de Fourier	Continu et périodique
4 – discret et périodique	Transformée de Fourier discrète (TFD)	Discret et périodique

En effet, le spectre d'un signal continu est non périodique. Que le signal soit périodique (cas 1) ou non (cas 2), il est obtenu à partir du développement en série de Fourier pour le cas 1 et de la Transformée de Fourier ou de l'intégrale de Fourier

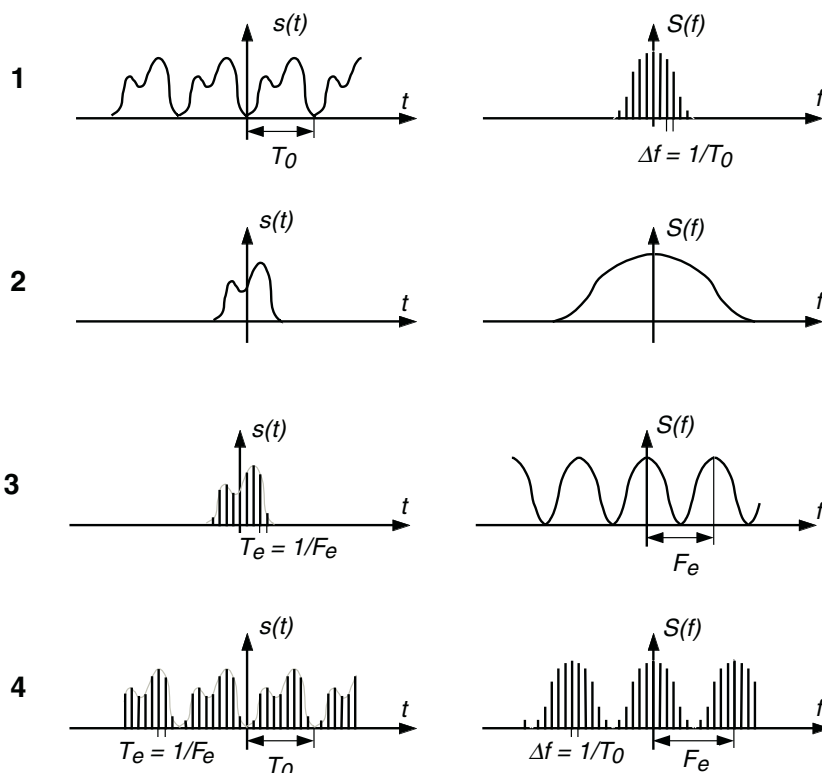


Figure 8.1. Représentations temporelles et spectrales des signaux classés selon leurs caractéristiques : périodiques ou non périodiques, continus ou discrets.

pour le cas 2. Le spectre d'un signal discret et non périodique (cas 3) est continu et périodique et obtenu à partir de l'intégrale de Fourier. Par contre le calcul du spectre d'un signal périodique et discret (cas 4) utilise une nouvelle transformée : la transformée de Fourier discrète ou TFD.

D'une façon générale, si l'on désire avoir une représentation spectrale numérique (calcul par ordinateur), le calcul des raies spectrales implique une discrétisation en fréquence, ce qui a pour conséquence de rendre le signal temporel périodique et discret. Le calcul de façon pratique est limité à une tranche du signal, ce qui revient à des transformées identiques pour un signal non périodique et un signal périodique, c'est-à-dire que le signal transitoire doit être considéré comme périodiquement répété en dehors de son domaine d'existence.

8.2 TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

8.2.1 Définition

Dans le but de calculer la transformée de Fourier d'un signal $s(t)$ à l'aide d'un ordinateur, celui-ci n'ayant qu'un nombre limité de mots de taille finie, on est amené

à discrétiser le signal (échantillonnage) et à tronquer temporellement ce signal. On obtient ainsi une suite de N termes représentée par :

$$s_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) \quad (8.1)$$

Appelons s_k les valeurs du signal $s_{e,\Pi}(t)$ aux instants kT_e . Le spectre $S_{e,\Pi}(f)$ de ce signal échantillonné limité à N termes est donné sous la forme de N éléments de valeurs S_m espacés de F_e/N suivant une expression identique :

$$S_{e,\Pi}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} S_m \cdot \delta\left(f - m \frac{F_e}{N}\right) \quad (8.2)$$

De la même façon que la transformée de Fourier $S(f)$ du signal analogique $s(t)$ s'exprime sous la forme :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

On appelle Transformée de Fourier Discrète (TFD ou DFT : *Discrete Fourier Transform*) d'un signal défini par N échantillons s_k , la suite de N termes S_m définie par :

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{N}} \quad (8.3)$$

La transformée de Fourier discrète réalise la correspondance entre deux suites de N termes (figure 8.2).

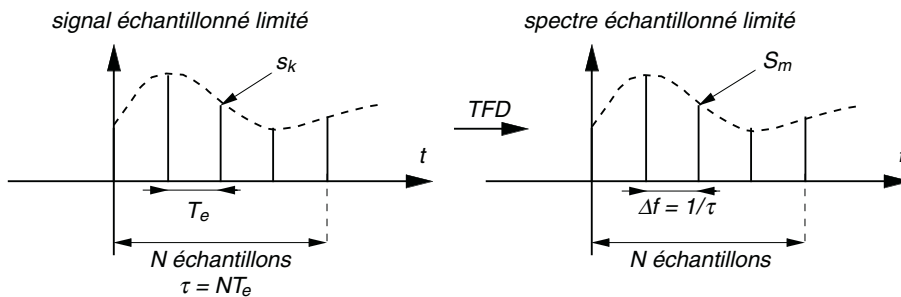


Figure 8.2. Transformée de Fourier discrète.

Si les N échantillons ont été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_e ($F_e = 1/T_e$), la durée du signal échantillonné, sur laquelle a été calculée la transformée de Fourier discrète, est donnée par :

$$\tau = N \cdot T_e = \frac{N}{F_e} \quad (8.4)$$

En conséquence, le spectre de ce signal échantillonné, composé aussi de N termes, est calculé sur un domaine fréquentiel $[0, F_e]$ avec une précision ou distance fréquentielle entre points égale à :

$$\Delta f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{N \cdot T_e} = \frac{F_e}{N} \quad (8.5)$$

De même que pour la transformée de Fourier d'un signal continu, on peut définir une transformation inverse qui s'écrit :

$$s_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \delta(t - kT_e) \quad \text{avec} \quad s_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S_m \cdot e^{j2\pi \frac{k \cdot m}{N}} \quad (8.6)$$

8.2.2 Transformée de Fourier et TFD

Étant donné la définition de la transformée de Fourier discrète ou TFD que nous venons d'introduire, il est intéressant de répondre à deux questions concernant la relation entre la transformée de Fourier et la TFD :

- d'une part, le signal échantillonné de N points étant considéré comme un signal continu transitoire, quelle est la transformée de Fourier de ce signal ?
- d'autre part, connaissant la transformée de Fourier d'un signal continu, quelle est la relation entre les points de la transformée de Fourier discrète de ce signal échantillonné et les valeurs de la transformée de Fourier à ces mêmes fréquences ?

a) Transformée de Fourier du signal échantillonné tronqué et TFD

Soit un signal $s(t)$, échantillonné à la fréquence F_e ($F_e = 1/T_e$) et tronqué par un signal « porte » de largeur τ ($\tau = NT_e$) qui prélève N points d'amplitude s_k de ce signal, soit :

$$s_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \delta(t - kT_e)$$

La transformée de Fourier de ce signal est donc donnée par :

$$S_{e,\Pi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot \delta(t - kT_e) \right] \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt$$

Soit le résultat suivant :

$$S_{e,\Pi}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j2\pi f k T_e}$$

Or pour obtenir la transformée de Fourier discrète, il faut échantillonner par pas de $1/\tau$ ($1/\tau = F_e/N$), soit :

$$S_{e,\Pi,e}(f) = S_{e,\Pi}(f) \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - m/\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_{e,\Pi}(m/\tau) \cdot \delta(f - m/\tau)$$

Cette expression doit être tronquée, puisque le nombre des échantillons de la représentation spectrale est limité à N :

$$S_{e,\Pi,e,\Pi}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} S_{e,\Pi}(m/\tau) \cdot \delta(f - m/\tau)$$

Nous avons bien obtenu la relation de définition de la transformée de Fourier discrète (équation 8.3) :

$$S_{e,\Pi,e,\Pi}(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j2\pi \frac{km}{N}} \right] \cdot \delta(f - m/\tau)$$

b) Transformée de Fourier et TFD

Considérons un signal $s(t)$ et sa transformée de Fourier $S(f)$. À la suite $s(kT_e) = s_k$ pour $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ correspondent les échantillons de la transformée de Fourier discrète S_m avec $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ par la relation 8.3 :

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j2\pi \frac{km}{N}}$$

La question, qui se pose, est donc le lien qui existe entre les valeurs de $S(f)$ aux fréquences mF_e/N et S_m pour $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. En posant $\tau = NT_e$, dans le cas où le signal est périodique de période τ , à spectre borné $F_{\max}$, et étant donné que :

- la largeur de la troncature temporelle est égale à la période τ ;
- le théorème de Shannon doit être respecté : $F_e \geq 2F_{\max}$.

Il y a coïncidence, à un facteur multiplicatif près, entre $S(mF_e/N)$ et S_m :

$$S_m = \frac{\tau}{T_e} \cdot S\left(m \frac{F_e}{N}\right) = N \cdot S\left(m \frac{F_e}{N}\right)$$

Ce résultat provient essentiellement du fait que la fonction sinus cardinal (sinc), qui agit sur le spectre en le déformant, ne va pas produire cet effet car elle s'annule pour toutes les raies du spectre en $1/\tau$.

c) Interprétation du résultat de la TFD

Après le calcul de la transformée de Fourier discrète, on obtient une suite de n termes. Comme nous l'avons vu précédemment, les n échantillons temporels ayant été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_e ($F_e = 1/T_e$) et sur une durée τ ($\tau = N.T_e$), le spectre, composé de n termes, est calculé sur un domaine fréquentiel $[0, F_e]$ avec une précision ou distance fréquentielle entre points égale à $\Delta f = F_e/N$.

L'interprétation des n échantillons S_m obtenus peut se faire en s'appuyant sur une analogie avec la représentation spectrale obtenue avec le développement en série de Fourier. Chaque échantillon peut être considéré comme un « harmonique » du spectre

du signal. D'autre part le calcul est réalisé avec un indice positif des échantillons variant entre $[0, N - 1]$ qui correspond à un domaine fréquentiel $[0, F_e[$. Mais il serait plus exact de la représenter sur un intervalle $] - F_e/2, F_e/2]$. Ainsi l'interprétation des échantillons est présentée sur le tableau 8.2 et la figure 8.3, page ci-contre.

TABLEAU 8.2. Interprétation des échantillons calculés par TFD.

Échantillons	Fréquence $[0, F_e]$	Fréquence $[-F_e/2, F_e/2]$	interprétation
S_0	0	0	Composante continue
S_1	Δf	Δf	Fondamental ou 1 ^{er} harmonique
S_2	$2\Delta f$	$2\Delta f$	2 ^e harmonique
S_3	$3\Delta f$	$3\Delta f$	3 ^e harmonique
...			
$S_{N/2-1}$	$F_e/2 - \Delta f$	$F_e/2 - \Delta f$	$(N/2 - 1)^e$ harmonique
$S_{N/2}$	$F_e/2f$	$F_e/2f$	$(N/2)^e$ harmonique (fréquence de Nyquist)
$S_{N/2+1}$	$F_e/2 + \Delta f$	$-F_e/2 + \Delta f$	$(N/2 + 1)^e$ harmonique/ $-(N/2 - 1)^e$ harmonique
...			
S_{N-3}	$F_e - 3\Delta f$	$-3\Delta f$	$(N - 3)^e$ harmonique/ -3^e harmonique
S_{N-2}	$F_e - 2\Delta f$	$-2\Delta f$	$(N - 2)^e$ harmonique/ -2^e harmonique
S_{N-1}	$F_e - \Delta f$	$-\Delta f$	$(N - 1)^e$ harmonique/ -1^e harmonique

Cette interprétation des échantillons obtenus montre bien que la précision d'analyse fréquentielle du spectre est donnée par Δf qui est directement lié à la fenêtre d'observation du signal τ ($\tau = 1/\Delta f$). Pour une fréquence d'échantillonnage F_e constante, l'augmentation de la précision en fréquence Δf passe par une augmentation du nombre de point N et donc de la fenêtre d'observation τ .

Un exemple concret de cette visualisation de spectre obtenu par TFD est présenté sur la figure 8.4, page ci-contre. Cette représentation spectrale est tracée sur l'intervalle $]0, F_e]$. Pour un signal sinusoïdal pur de fréquence 1 kHz échantillonné à la fréquence de 6,4 kHz, nous voyons apparaître une raie à 1 kHz et une deuxième raie à 5,4 kHz correspondant à la périodisation du spectre par numérisation (paragraphe 7.1.1). Il est aussi intéressant de noter l'effet du fenêtrage temporel, déjà cité dans le paragraphe 4.2.2 et que nous allons étudier dans le chapitre 8.5.

8.3 TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE

La transformée de Fourier rapide *TFR* ou *FFT* (*Fast Fourier Transform*) est simplement un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations, en particulier le nombre de multiplications, pour calculer la TFD. Ce temps de calcul est en effet primordial pour réaliser des systèmes numériques en « temps réel ».

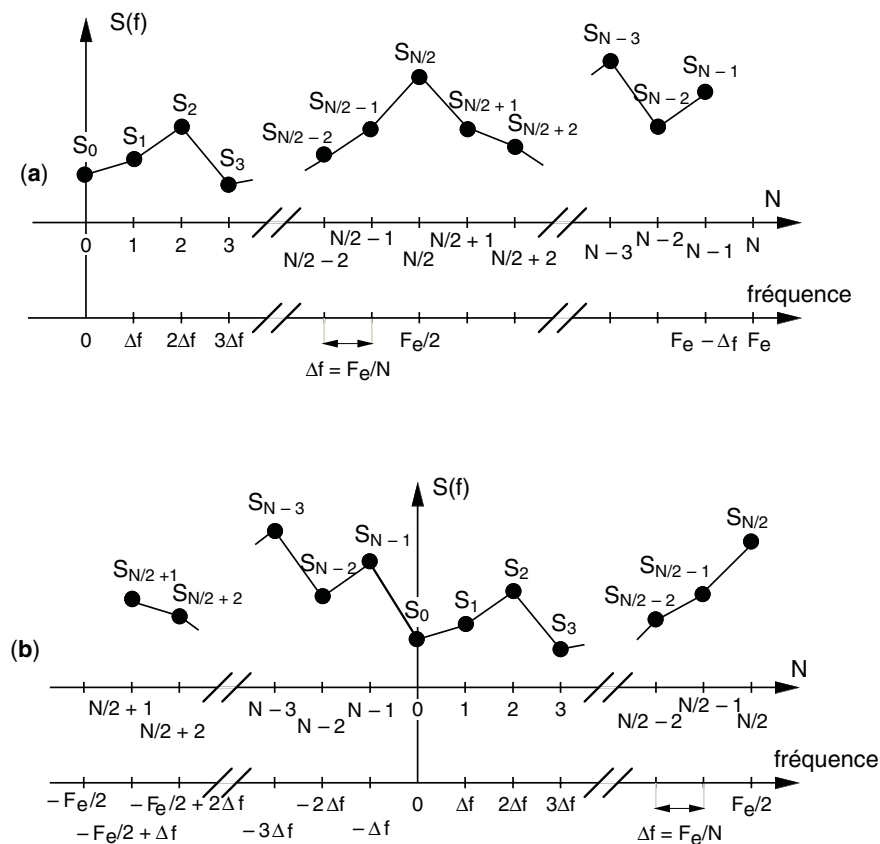


Figure 8.3. Interprétation graphique du résultat de calcul d'une TFD : (a) représentation directe et (b) représentation avec des fréquences négatives.

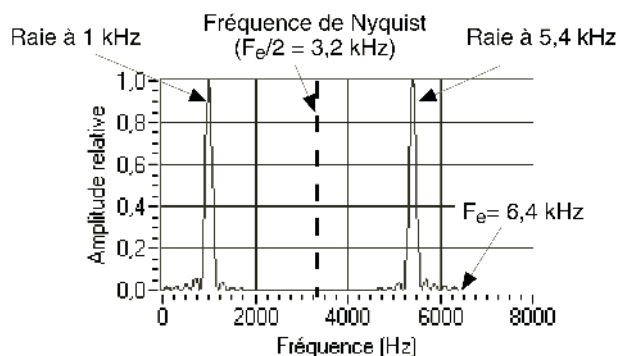


Figure 8.4. Exemple du spectre en puissance d'un signal sinusoïdal avec visualisation des effets de la représentation bilatérale et de la périodisation du spectre par numérisation.

a) Comparaison TFD et TFR

En considérant la relation permettant de calculer la TFD (équation 8.3), les opérations à effectuer pour obtenir ces N valeurs de la transformée de Fourier discrète dans le cas de N échantillons du signal initial sont :

- $N \cdot N = N^2$ multiplications complexes ;
- $N \cdot (N - 1)$ additions complexes.

Étant donné que la durée d'exécution d'une addition complexe est négligeable devant la durée d'une multiplication complexe, le coût de calcul de la transformée de Fourier discrète va donc essentiellement dépendre du temps de réalisation d'une multiplication complexe.

Il existe différents algorithmes de transformée de Fourier rapide. Le plus connu et le plus utilisé est celui de Cooley-Tukey (appelé aussi à entrelacement temporel). Le nombre des multiplications complexes est $(N/2) \log(N)$. Le gain en fonction du nombre d'échantillons est important, sachant que le calcul de TFD se fait généralement sur un minimum de 512 ou 1 024 échantillons et que le temps de calcul d'une multiplication est prépondérant par rapport à l'addition, le temps de calcul d'une TFD par FFT peut être réduit d'un facteur supérieur à 100 (tableau 8.3) :

$$N^2 / \frac{N}{2} \log(N) = 2N / \log(N)$$

TABLEAU 8.3. Amélioration des temps de calcul d'une transformée de Fourier discrète par utilisation d'un algorithme à entrelacement temporel.

Nombre d'échantillons	Rapport du nombre de multiplications complexes
8	5
128	36
512	114
1 024	205
2 048	372

b) Algorithme de transformée de Fourier rapide

L'algorithme de Cooley-Tukey, appelé aussi algorithme de réduction à base 2 dans le domaine temporel, s'applique dans le cas où le nombre N d'échantillons s_k s'exprime sous la forme 2^L et permet alors de simplifier le problème par une décomposition dichotomique. Posons :

$$W_N^{mk} = e^{-j2\pi \frac{km}{N}}$$

Cette fonction a les propriétés suivantes :

$$W_N^{2mk} = e^{-j2\pi \frac{2km}{N}} = e^{-j2\pi \frac{km}{N/2}} = W_{N/2}^{mk}$$

et pour $m < N/2$:

$$W_N^{mk+N/2} = e^{-j2\pi \frac{mk+N/2}{N}} = e^{-j2\pi \frac{km}{N}} \cdot e^{-j\pi} = -W_N^{mk}$$

Pour calculer les N échantillons de la DFT $\{S_0, S_1, S_2, \dots, S_{N-2}, S_{N-1}\}$, on utilise l'expression de base :

$$S_m = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot W_N^{mk} \quad \text{pour } m \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

En séparant les échantillons d'ordre pair et d'ordre impair, il vient :

$$S_m = \sum_{i=0}^{N/2-1} s_{2i} \cdot W_N^{m(2i)} + \sum_{i=0}^{N/2-1} s_{2i+1} \cdot W_N^{m(2i+1)} = \sum_{i=0}^{N/2-1} s_{2i} \cdot W_{N/2}^{mi} + W_N^m \cdot \sum_{i=0}^{N/2-1} s_{2i+1} \cdot W_{N/2}^{mi}$$

Ce résultat montre que les échantillons S_m de la DFT d'ordre N s'expriment sous la forme de deux DFT d'ordre $N/2$:

$$S_m = S_{1(N/2),m} + W_N^m \cdot S_{2(N/2),m} \quad (8.7)$$

avec $S_{1(N/2),m}$ transformée d'ordre $N/2$ effectuée sur les échantillons d'ordre pair et $S_{2(N/2),m}$ transformée d'ordre $N/2$ effectuée sur les échantillons d'ordre impair.

Ainsi nous avons donc à calculer 2 transformées d'ordre $N/2$ et $N/2$ multiplications complexes pour terminer le calcul. Si l'on considère l'opérateur « papillon », représenté sur la figure 8.5, le calcul d'une DFT d'ordre N conduit à faire le calcul de deux DFT d'ordre $N/2$ et de terminer un calcul en utilisant un opérateur « papillon » avec le coefficient W_N^m (figure 8.6, page suivante). En effet l'équation 8.7 peut être précisée selon l'intervalle d'appartenance de l'indice m :

- pour $0 \leq m' \leq N/2 - 1$: $S_{m'} = S_{1,m'} + W_N^{m'} \cdot S_{2,m'}$
 - pour $N/2 \leq m'' \leq N - 1$: $S_{m''} = S_{1,m''-N/2} - W_N^{m''-N/2} \cdot S_{2,m''-N/2}$
- en posant $m' = m'' - N/2$: $S_{m''} = S_{1,m'} - W_N^{m'} \cdot S_{2,m'}$

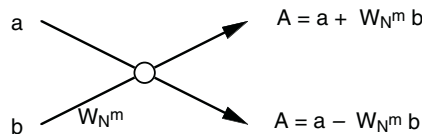


Figure 8.5. Opérateur de base pour le calcul de la TFR : opérateur « papillon ».

Cette analyse peut être réalisée L fois si $N = 2^L$. On obtient alors à la fin du processus de dichotomie une transformée d'ordre 2 dont la matrice de calcul ne demande pas de multiplication car :

$$W_2^1 = -1 \quad \text{et} \quad W_2^0 = +1$$

Ainsi l'algorithme complet du calcul peut être représenté sous la forme de L étapes de calcul de type « papillon » commençant par le calcul des $N/2$ transformées d'ordre 2 (figure 8.7, page suivante).

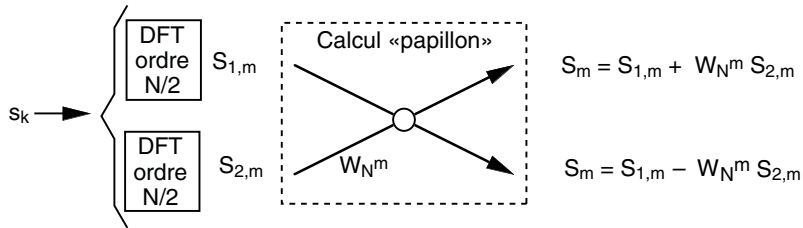


Figure 8.6. Calcul d'une TFR d'ordre n à partir de deux TFR d'ordre $N/2$.

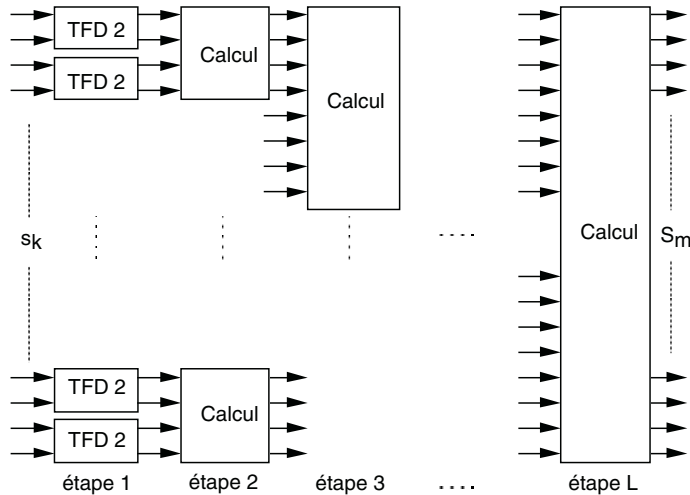


Figure 8.7. Représentation schématique de la TFR suivant l'algorithme de réduction à base 2 ou avec entrelacement temporel.

Pour illustrer ce principe de calcul nous allons considérer le cas $N = 8$. Pour réaliser le calcul de la TFD, nous disposons des 8 échantillons temporels s_k avec $k \in [0, 7]$ et nous allons calculer les 8 échantillons fréquentiels S_m avec $m \in [0, 7]$. L'expression, utilisée pour calculer les S_m en fonction des s_k , est la suivante :

$$S_m = \sum_{k=0}^7 s_k \cdot W_8^{mk} \quad \text{avec} \quad W_8^{mk} = e^{-j\pi \frac{km}{4}}$$

Calculons les valeurs de W_8^{mk} . Seules les 8 premières valeurs de W_8^{mk} sont différentes puisque cette fonction est identique modulo $N = 8$, soit :

$$W_8^0 = -W_8^4 = 1 \quad \text{et} \quad W_8^1 = -W_8^5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j)$$

$$W_8^2 = -W_8^6 = -j \quad \text{et} \quad W_8^3 = -W_8^7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$$

Un premier découpage dichotomique conduit à réaliser deux TFD d'ordre 4 et un calcul « papillon » avec les échantillons résultants $S_{i,m}$. Les deux transformées de Fourier discrètes sont calculées à partir des équations suivantes :

- échantillons pairs : $S_{1,m} = \sum_{k=0}^3 s_{2k} \cdot W_4^{mk}$ pour $m \in [0, 3]$
- échantillons impairs : $S_{2,m} = \sum_{k=0}^3 s_{2k+1} \cdot W_4^{mk}$ pour $m \in [0, 3]$

avec les quatre valeurs de la fonction W_4^{mk} : $W_4^0 = -W_4^2 = 1$ et $W_4^1 = -W_4^3 = -j$

Ensuite les échantillons de la DFT complète sont obtenus à l'aide du calcul « papillon » avec les coefficients W_8^{mk} (figure 8.8) :

- pour $0 \leq m \leq 3$: $S_m = S_{1,m} + W_8^m \cdot S_{2,m}$
- pour $4 \leq m \leq 7$: $S_m = S_{1,m-4} + W_8^{m-4} \cdot S_{2,m-4}$

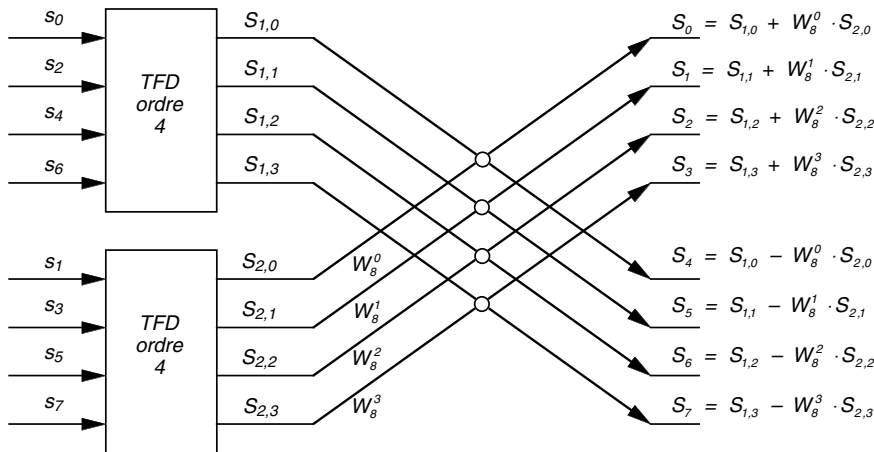


Figure 8.8. Représentation schématique du calcul de la TFR après un premier découpage dichotomique de la TFD.

Les coefficients des expressions, donnant $S_{1,m}$ et $S_{2,m}$, étant très simples (1 ou j), la méthode de découpage peut se limiter à cette étape et conserver ainsi comme premier calcul des TFD d'ordre 4. Les algorithmes, construits sur ce principe, sont appelés « FFT Radix-4 ».

En continuant le découpage dichotomique, nous obtenons alors le calcul de 4 TFD d'ordre 2 à réaliser suivi du calcul « papillon » avec les échantillons résultants $S_{i,j,m}$. Les quatre transformées de Fourier discrètes sont calculées à partir des équations suivantes :

- échantillons pairs et impairs de $S_{1,m}$ pour $m \in [0, 1]$:

$$S_{1,1,m} = \sum_{k=0}^1 s_{4k} \cdot W_2^{mk} \quad \text{et} \quad S_{1,2,m} = \sum_{k=0}^1 s_{4k+2} \cdot W_2^{mk}$$

- échantillons pairs et impairs de $S_{2,m}$ pour $m \in [0, 1]$:

$$S_{2,1,m} = \sum_{k=0}^1 s_{4k+1} \cdot W_2^{mk} \quad \text{et} \quad S_{2,2,m} = \sum_{k=0}^1 s_{4k+3} \cdot W_2^{mk}$$

avec les deux valeurs de la fonction W_2^{mk} :

$$W_2^0 = -W_2^1 = 1$$

Étant donné les valeurs des coefficients W_2^{mk} , une TFD d'ordre 2 correspond à un opérateur de type « papillon » sans coefficient, donc une simple somme ou différence de nombres complexes (coût de calcul négligeable). Ensuite les échantillons intermédiaires $S_{1,m}$ et $S_{2,m}$ sont obtenus à l'aide du calcul « papillon » avec les coefficients W_2^{mk} ou W_2^{mk} équivalents (figure 8.9) :

- pour $0 \leq m \leq 1$:

$$\begin{aligned} S_{1,m} &= S_{1,1,m} + W_4^m \cdot S_{1,2,m} = S_{1,1,m} + W_8^{2m} \cdot S_{1,2,m} \\ S_{2,m} &= S_{2,1,m} + W_4^m \cdot S_{2,2,m} = S_{2,1,m} + W_8^{2m} \cdot S_{2,2,m} \end{aligned}$$

- pour $2 \leq m \leq 3$:

$$\begin{aligned} S_{1,m} &= S_{1,1,m-2} - W_4^{m-2} \cdot S_{1,2,m-2} = S_{1,1,m-2} - W_8^{2(m-2)} \cdot S_{1,2,m-2} \\ S_{2,m} &= S_{2,1,m-2} - W_4^{m-2} \cdot S_{2,2,m-2} = S_{2,1,m-2} - W_8^{2(m-2)} \cdot S_{2,2,m-2} \end{aligned}$$

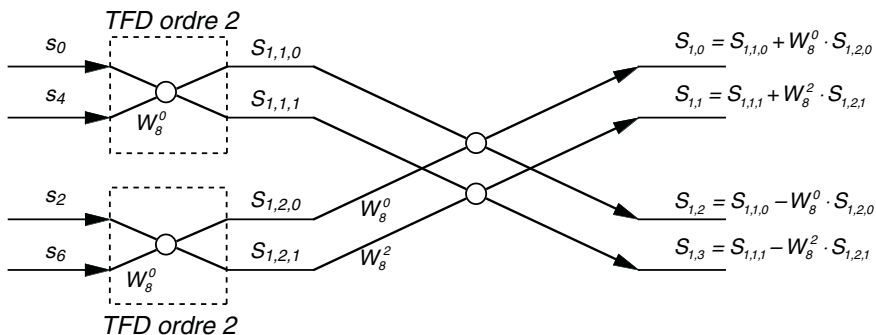


Figure 8.9. Représentation schématique du calcul de la TFR après un deuxième découpage dichotomique de la TFD : exemple de calcul des échantillons $S_{i,m}$.

Finalement nous obtenons dans ce cas le schéma général du calcul de la TFD d'ordre 8 qui conduit à un calcul de 4 TFD d'ordre 2 (ou opérateur « papillon » sans coefficient), suivi de deux étapes de calcul « papillon » (figure 8.10, page ci-contre).

Il est important de noter que pour un calcul immédiat sous cette forme les échantillons s_k doivent être classés dans un ordre permuté. Cette permutation est due aux entrelacements successifs et se traduit par un retournement ou une inversion de la

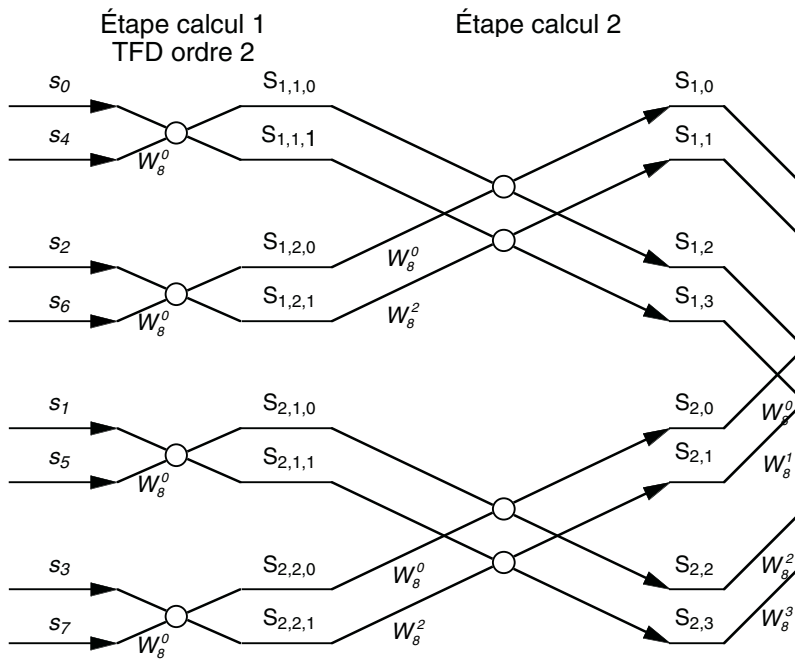


Figure 8.10. Représentation schématique de la TFR selon la méthode à entrelacement temporel pour 8 échantillons.

représentation binaire des indices (transformation 0 en 1 et 1 en 0 des indices codés en binaire).

Ainsi les programmes de TFR ou FFT suivant cette méthode commencent toujours par un classement des échantillons et ensuite réalisent le calcul des différentes étapes. De nombreux programmes, qui implémentent cette méthode, existent dans les différents langages de haut niveau et sont souvent disponibles dans les bibliothèques scientifiques de base (www.intersrv.com/~dcross/fft.html). Dans tous les cas le calcul d'une TFR se traduit par un temps important.

Pour améliorer ces temps de calcul de transformée de Fourier rapide et obtenir des résultats en « temps réel », par exemple dans les systèmes de type radar, il est nécessaire d'utiliser des processeurs de traitement de signaux (DSP : *Digital Signal Processing*).

Ces processeurs possèdent des unités de calculs rapides. La mise en œuvre de ce type d'algorithmes, disponible dans les bibliothèques de programmes fournies avec ces processeurs, est aisée et conduit à des performances très intéressantes. Considérons ainsi le processeur TMS 320C25 (Texas Instruments), nous avons les résultats suivants : 200 μ s pour 64 échantillons, 3 ms pour 256 et 20 ms pour 1 024.

Les programmes écrits en langage de haut niveau (C ou autre) et compilés sur des processeurs 32 bits (ex : 68 040 de chez Motorola), conduisent à des temps de calcul de l'ordre de quelques 100 ms ou plus pour un nombre d'échantillons égal à 1 024.

8.4 CONVOLUTION ET CORRÉLATION NUMÉRIQUES

8.4.1 Convolution discrète

De la même manière que pour la transformée de Fourier, il est possible de définir la convolution discrète. Considérons deux signaux $x(t)$ et $y(t)$; l'échantillonnage donne les suites de termes : $x(iT_e)$ ($= x_i$) et $y(iT_e)$ ($= y_i$). La convolution discrète z de x et de y , formée des points $z(iT_e)$ ($= z_i$), est définie à partir de l'écriture discrétisée de la relation de définition 3.10 :

$$z_k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i \cdot y_{k-i} \quad \text{avec } k \text{ quelconque} \quad (8.8)$$

Mais, pour n échantillons de x_i et y_i , la convolution discrète s'exprime par :

$$z_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{k-i} \quad \text{avec } k \in [0, N-1] \quad (8.9)$$

Il est important de remarquer que ce calcul nécessite de connaître y_i en dehors de l'intervalle précédemment défini ; en effet nous avons besoin des échantillons correspondant à l'intervalle $i \in \{-N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1\}$. Pour pouvoir réaliser effectivement le calcul, plusieurs solutions sont possibles pour définir les échantillons y_i (figure 8.11, page ci-contre) :

cas 1 : les échantillons en dehors de l'intervalle $\{0, 1, \dots, N-1\}$ sont considérés comme nuls : $x_i = 0$ et $y_i = 0$ pour $i < 0$ ou $i \geq N$. Dans ce cas il est préférable de calculer la convolution sur un intervalle qui fait intervenir symétriquement les échantillons de y_i et donc de calculer la convolution sur $2N-1$ points :

$$z_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{k-i} \quad \text{avec } k \in [0, \dots, 2N-1]$$

cas 2 : les échantillons en dehors de l'intervalle $\{0, 1, \dots, N-1\}$ sont considérés comme identiques, c'est-à-dire comme si la fonction était périodique et de période NT_e ;

cas 3 : enfin les échantillons en dehors de l'intervalle $\{0, 1, \dots, N-1\}$ peuvent être connus et alors utilisés pour le calcul. Ou s'ils ne le sont pas, la convolution peut alors être calculée sur un intervalle moitié de l'intervalle de connaissance des échantillons y_i , ici $N/2$.

Le premier cas conduit à des résultats présentant des distorsions, alors que les deux dernières solutions conduisent à des résultats beaucoup plus acceptables et qui semblent être les plus communément utilisées.

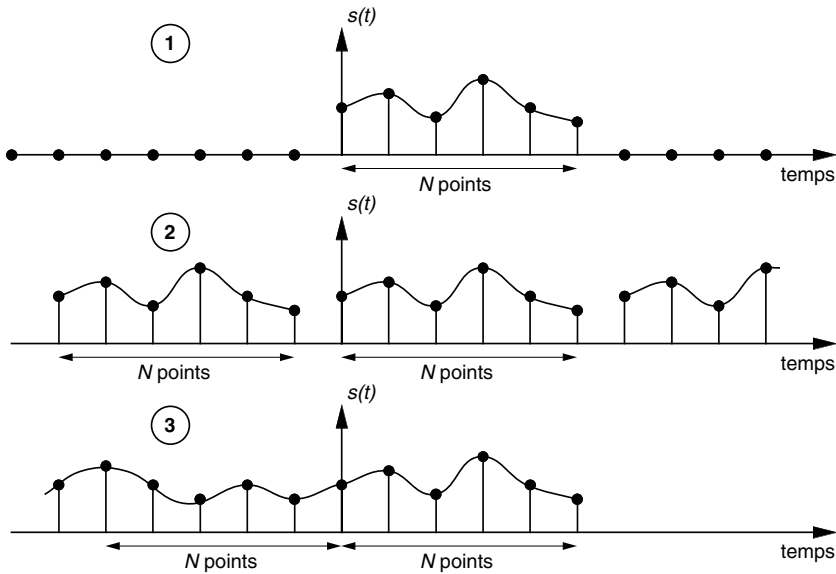


Figure 8.11. Les différentes solutions pour le calcul d'une convolution ou d'une corrélation discrète.

8.4.2 Corrélation discrète

De même, il est possible de définir la corrélation discrète. Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$; l'échantillonnage donne les suites de termes : $x(iT_e)$ ($= x_i$) et $y(iT_e)$ ($= y_i$). La corrélation discrète $C_{xy,k}$ de x et y est définie à partir de la relation 3.20 qui conduit à la relation discrétisée suivante :

$$C_{xy,k} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \text{ quelconque} \quad (8.10)$$

Mais, pour N échantillons de x_i et y_i , la convolution discrète s'exprime par :

$$C_{xy,k} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \in [0, N-1] \quad (8.11)$$

Comme pour la convolution discrète, il est nécessaire de connaître des valeurs de y_i en dehors de l'intervalle initial et les trois solutions proposées précédemment sont possibles. Le premier cas où l'on considère des échantillons nuls en dehors de l'intervalle initial conduit à des résultats présentant des distorsions par rapport au calcul analytique réalisé sur des signaux définis sur tout l'axe des temps. L'expression discrétisée de la corrélation est alors la suivante (figure 8.12, page suivante) :

$$C_{xy,k} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \in [0, 2N-1] \quad (8.12)$$

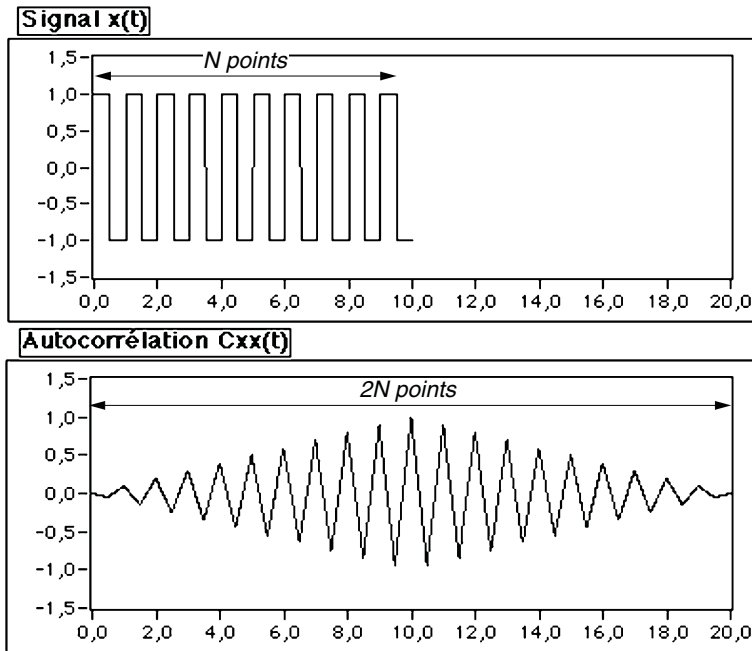


Figure 8.12. Calcul de la corrélation discrète en supposant les échantillons nuls en dehors de l'intervalle.

Le calcul sur $2N$ points permet d'avoir une fonction de corrélation symétrique. En considérant la solution où la corrélation est calculée sur la moitié des N points initiaux, nous obtenons alors un résultat identique à celui obtenu avec un calcul analytique réalisé sur des signaux définis sur tout l'axe des temps. L'expression discrétisée de la corrélation est alors la suivante (figure 8.13, page ci-contre) :

$$C_{xy,k} = \sum_{i=0}^{N/2-1} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \in [0, N/2 - 1] \quad (8.13)$$

ou

$$C_{xy,k} = \sum_{i=(N/2)-1}^{N-1} x_i \cdot y_{i-k} \quad \text{avec } k \in [0, N/2 - 1] \quad (8.14)$$

8.5 EFFET DU FENÊTRAGE TEMPOREL

Comme nous l'avons étudié au paragraphe 4.2, le traitement analogique ou numérique d'un signal de durée finie ou tronqué $s_{\Pi}(t)$ conduit à une déformation de son spectre. Dans le cadre de la TFD que nous venons d'étudier, le signal est obligatoirement limité aux N échantillons numériques avec lesquels la TFD est calculée, c'est-à-dire à une durée $\tau (= NT_e)$. Cet effet a été modélisé par la relation suivante :

$$s_{\Pi}(t) = s(t) \cdot \Pi_{\tau}(t)$$

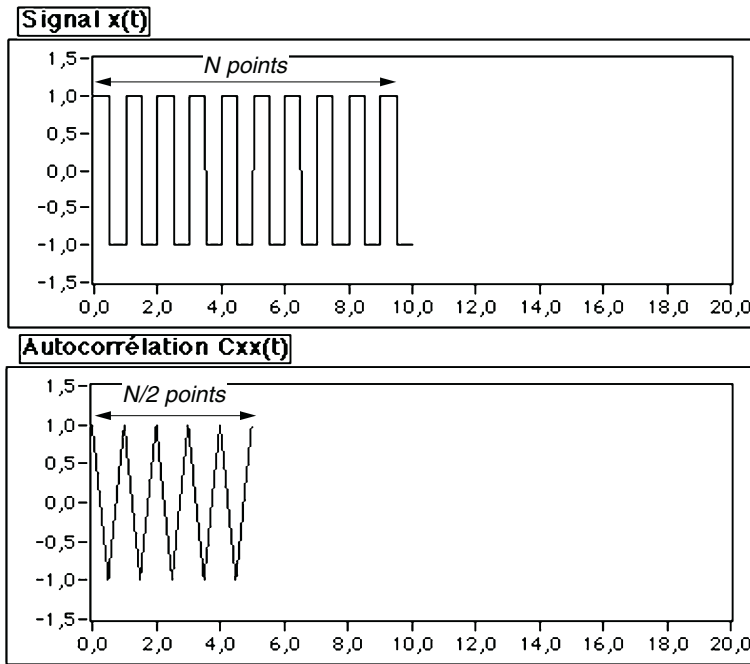


Figure 8.13. Calcul de la corrélation discrète en utilisant la moitié de l'intervalle sur lequel sont connus les échantillons.

et donc un spectre en fréquence donné par :

$$S_{\Pi}(f) = S(f) * \left[\tau \cdot \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right]$$

Dans le cas d'un signal périodique, le spectre, obtenu par transformée de Fourier discrète, est donc un ensemble de fonctions $\text{sinc}(\tau f)$ centrées sur les fréquences qui composent le signal théorique initial.

Ainsi l'exemple, présenté sur la figure 8.14, page suivante, montre le spectre d'un signal périodique composé de deux signaux sinusoïdaux purs de fréquence 1 kHz et 1,5 kHz et d'amplitude égale. La fenêtre temporelle de mesure ou de calcul (cas de la TFD) est de 20 ms soit respectivement 20 périodes pour le signal à 1 kHz et 30 périodes pour le signal à 1,5 kHz. À la place de deux raies spectrales théoriques aux deux fréquences considérées, nous obtenons donc deux fonctions sinc qui donnent un spectre continu présentant un maximum pour les deux fréquences 1 kHz et 1,5 kHz. Ainsi cette qualité du résultat peut être incommode pour l'étude du spectre, en particulier lorsque le spectre est composé de nombreuses raies, proches les unes des autres.

Pour caractériser cette « déformation » du spectre due à la fenêtre temporelle de type porte (fenêtre naturelle) $g_{\text{fen}}(t) = \Pi_{\tau}(t)$, nous allons définir les quatre paramètres suivants en considérant la valeur absolue de la fonction sinus cardinal (figure 8.15, page suivante) :

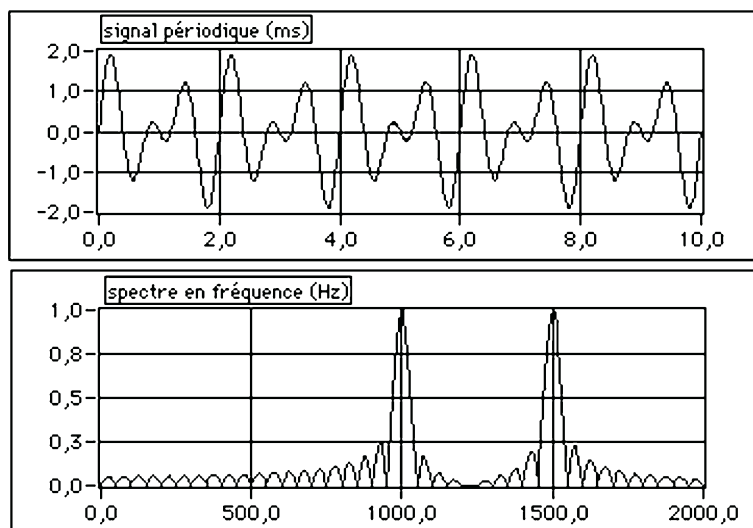


Figure 8.14. Visualisation de la déformation du spectre d'un signal périodique due au fenêtrage temporel.

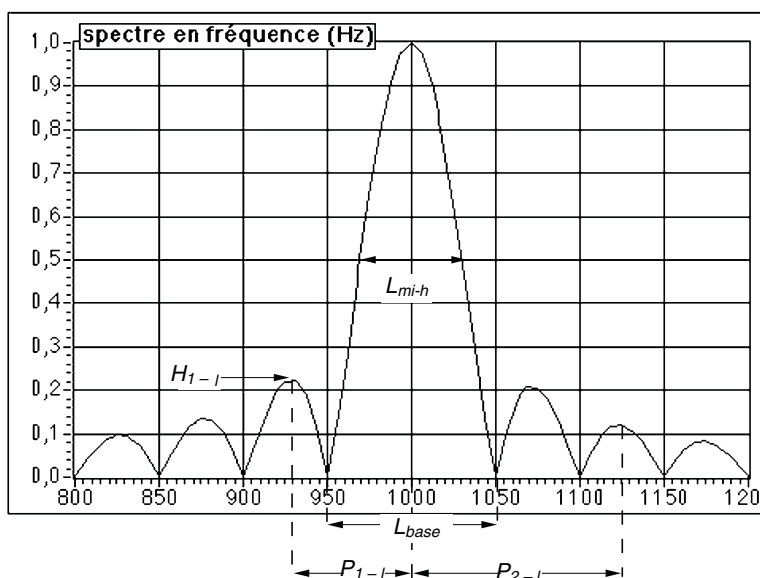


Figure 8.15. Caractérisation de la déformation du spectre due au fenêtrage.

- la largeur à mi-hauteur du pic principal par rapport à la largeur de sa base dans le cas de la fenêtre naturelle :

$$L = \frac{L_{mi-h}}{L_{base}}$$

- l'amplitude du premier lobe secondaire par rapport à celle du pic principal généralement normé à 1 :

$$A = \frac{H_{1-l}}{H} = 1$$

- les positions des 2 premiers lobes secondaires par rapport à la position du pic central :

$$P_1 = \frac{P_{1-l}}{L_{\text{base}}/2} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{P_{2-l}}{L_{\text{base}}/2}$$

Dans le cas du traitement analogique des signaux, cette déformation spectrale est inévitable et correspond à la fenêtre de mesure ou fenêtre naturelle (fonction porte) et cela conduit à des paramètres de déformation, mesurés sur la figure 8.15, page ci-contre ou calculés directement sur la fonction sinc (figure 2.8, page 31) :

Fenêtre	L	A	P_1	P_2
naturelle	0,6	0,217	1,43	2,46

Par contre dans le cas d'un traitement numérique du signal (transformée de Fourier discrète), il est possible d'utiliser des fonctions-fenêtres $g_{\text{fen}}(t)$ différentes de la fenêtre naturelle $\Pi_{\tau}(t)$ permettant d'obtenir une représentation spectrale meilleur au sens des paramètres définis.

En effet les déformations spectrales obtenues sont directement liées au spectre de la fenêtre utilisée : fenêtre naturelle $\Rightarrow$ déformation de type sinc. Il serait souhaitable que les déformations obtenues soient moins importantes :

- largeur à mi-hauteur du pic principal L la plus petite possible ;
- l'amplitude relative A du 1^{er} lobe secondaire la plus faible possible ;
- les positions P_1 et P_2 des 2 premiers lobes secondaires les plus éloignées possibles.

Cette fenêtre $g_{\text{fen}}(t)$ agit sur les échantillons s_k pour obtenir de nouveaux échantillons $s_{k,f}$ avec les valeurs numériques de la fonction fenêtre discrétisée aux instants kT_e : $g_{\text{fen}}(kT_e) = g_{\text{fen},k}$. Soit :

$$s_{k,f} = s_k \cdot g_{\text{fen},k}$$

Dans le cas d'un signal périodique, le spectre sera donc un ensemble de fonctions, transformées de Fourier de la fonction-fenêtre $g_{\text{fen}}(t)$, centrées sur les fréquences qui composent le signal.

De nombreuses études ont été réalisées afin d'obtenir des fenêtres temporelles $g_{\text{fen}}(t)$ minimisant la déformation (*Smoothing Windows*), c'est-à-dire possédant un spectre plus proche des caractéristiques souhaitées. Ainsi, la première fenêtre utilisée a été la fenêtre « triangulaire » ou fenêtre de Bartlett qui a pour équation :

$$g_{\text{fen}}(t) = \Lambda_{\tau}(t) \quad \text{pour} \quad |t| \leq \frac{\tau}{2}$$

et

$$g_{\text{fen}}(t) = 0 \quad \text{pour} \quad |t| > \frac{\tau}{2}$$

Il est assez évident de connaître le spectre de cette fenêtre en utilisant le résultat obtenu dans le paragraphe 3.4.2 en calculant la fonction d'autocorrélation d'un signal « porte » :

$$\Lambda_{\tau}(t) = \frac{2}{\tau} \cdot [\Pi_{\tau/2}(t) * \Pi_{\tau/2}(t)]$$

Donc la transformée de Fourier de la fonction $\Lambda_{\tau}(t)$ est donnée par :

$$\Lambda_{\tau}(t) \xleftrightarrow{F} \frac{\tau}{2} \cdot \left[\frac{\sin(\pi(\tau/2)f)}{\pi(\tau/2)f} \right]^2$$

En utilisant cette fenêtre triangulaire nous obtenons le spectre possédant les caractéristiques suivantes :

Fenêtre	L	A	P_1	P_2
naturelle	0,6	0,217	1,43	2,46
triangulaire	0,89	0,047	2,86	5,92

Si les caractéristiques correspondant aux lobes secondaires sont effectivement améliorées, par contre la largeur du pic principal est augmentée. D'autres fenêtres plus complexes dans leurs expressions mathématiques et surtout dans le calcul du spectre sont utilisées en fonction de leurs caractéristiques. Nous présentons ci-après les principales fenêtres avec leur expression $g_{\text{fen}}(t)$ dans l'intervalle de la fenêtre ($|t| \leq \tau/2$), soit :

– fenêtre naturelle ou porte (cas traité précédemment) :

$$g_{\text{fen}}(t) = \Pi_{\tau}(t)$$

– fenêtre de Bartlett ou triangulaire (cas traité précédemment) :

$$g_{\text{fen}}(t) = \Lambda_{\tau}(t)$$

– fenêtre de Hanning :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,5 \cdot [1 - \cos(2\pi t/\tau)]$$

– fenêtre de Hamming :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,54 - 0,46 \cdot \cos(2\pi t/\tau)$$

– fenêtre de Blackman :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,42 - 0,5 \cdot \cos(2\pi t/\tau) + 0,08 \cdot \cos(4\pi t/\tau)$$

– fenêtre de Blackman-Harris :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,42323 - 0,49755 \cdot \cos(2\pi t/\tau) + 0,07922 \cdot \cos(4\pi t/\tau)$$

– fenêtre de Blackman exacte :

$$g_{\text{fen}}(t) = \frac{7938}{18608} - \frac{9240}{18608} \cdot \cos(2\pi t/\tau) + \frac{1430}{18608} \cdot \cos(4\pi t/\tau)$$

– fenêtre exponentielle :

$$g_{\text{fen}}(t) = e^{-a \cdot t} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\text{Log}(b)}{\tau} \quad \text{et } b : \text{valeur finale}$$

– fenêtre à « toit plat » :

$$g_{\text{fen}}(t) = 0,2810639 - 0,5208972 \cdot \cos(2\pi t/\tau) + 0,1980399 \cdot \cos(4\pi t/\tau)$$

De nombreuses autres fenêtres existent : fenêtre de Kaiser-Bessel, fenêtre de Parzen, fenêtre de Gauss (courbe de Gauss tronquée), etc.

Ces différentes fenêtres réalisent toujours un compromis entre la largeur du pic central et les caractéristiques des lobes secondaires (hauteur et position). Une comparaison des résultats obtenus est montrée sur la figure 8.16 et donnée dans le tableau 8.4, page suivante.

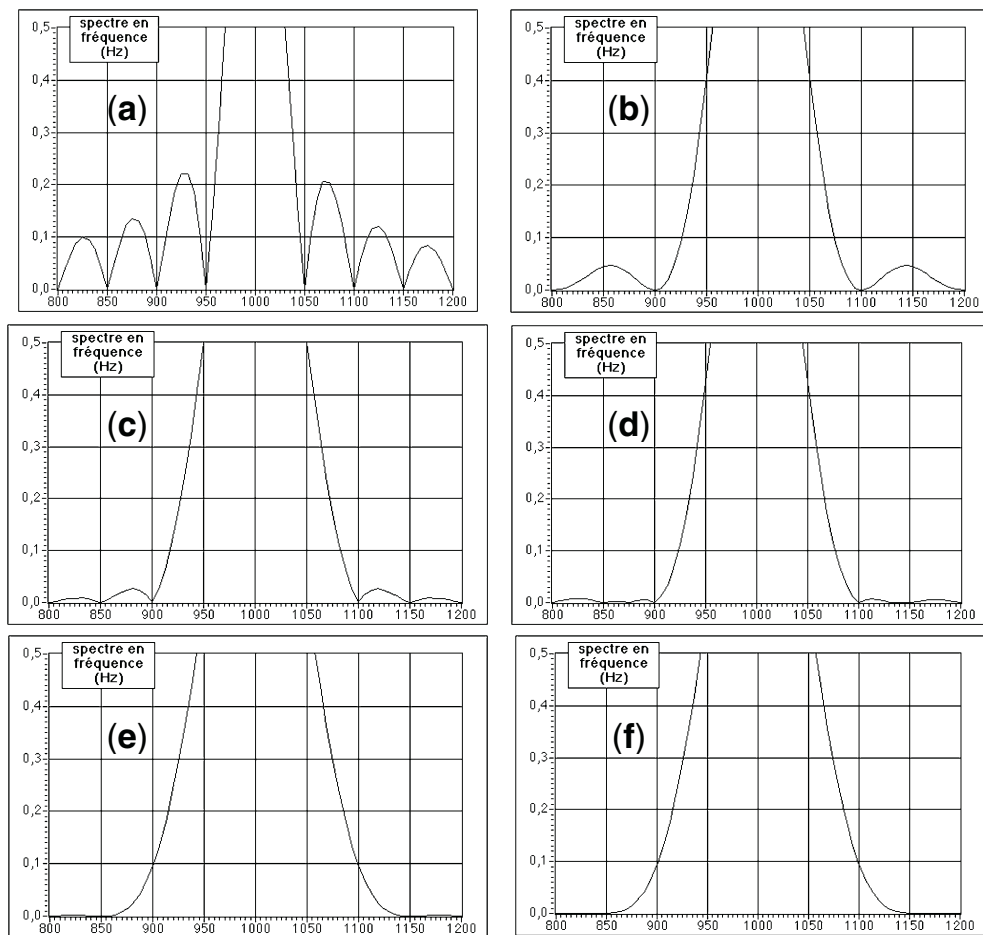


Figure 8.16. Comparaison de différentes fenêtres temporelles : (a) naturelle, (b) triangulaire, (c) Hanning, (d) Hamming, (e) Blackman, (f) Blackman-Harris. Exemple d'un signal sinusoïdal de 1 kHz limité à 20 périodes.

TABLEAU 8.4. Comparaison des différentes fenêtres de pondération.

Fenêtre	L	A	P_1	P_2	Remarques
naturelle	0,6	0,217	1,43	2,46	référence
triangulaire	0,89	0,047	2,86	5,92	lobes secondaires faibles et éloignés
Hanning	1	0,025	2,3	3,3	lobes secondaires faibles, fenêtre très utilisée
Hamming	0,91	0,0015	2,4	3,6	pic central étroit, lobes secondaires faibles
Blackman	1,2	0,0015	3,5	4,5	lobes secondaires faibles et éloignés
Blackman-Harris	1,2	0,0004	3,5	4,5	lobes secondaires très faibles
Blackman exacte	1,15	0,0005	3,5	4,4	lobes secondaires très faibles
à « toit plat »	1,8	0,01	3,3	4,5	résolution très bonne en amplitude
exponentielle ($b = 0,1$)	0,8	–	–	–	pic central très étroit, composante continue

Dans tous les cas, l'utilisation de fenêtre numérique va améliorer la lisibilité du spectre obtenu. Aussi cette possibilité est souvent offerte dans des appareils de mesure haut de gamme : oscilloscope numérique avec fonction de traitement du signal intégrée.

Le choix de la fenêtre la plus adaptée à une application est très difficile à réaliser. En pratique, il est conseillé de commencer par utiliser la fenêtre naturelle afin de ne pas produire de lissage par une fenêtre de pondération. Dans une deuxième étape, il est important de spécifier l'analyse spectrale recherchée : identification de deux fréquences très proches ($\Rightarrow$ élimination des lobes secondaires), comparaison des puissances respectives des pics de fréquences ($\Rightarrow$ fenêtres à faible déformation par lissage), résolution en fréquences et en puissance, etc. Ensuite la meilleure méthode consiste à tester l'effet des différentes fenêtres sur le spectre.

EXERCICE D'APPLICATION

Exercice 8.1 (Représentation réelle des TFD)

L'analyse harmonique d'un signal, instrument majeur du traitement du signal, implique de pouvoir visualiser le spectre d'un signal sur un analyseur de spectre (instrument spécifique) ou sur l'écran d'un ordinateur (utilisant un algorithme de TFD). Or, dans le cas général, le spectre $S(f)$ d'un signal quelconque $s(t)$ est complexe et bilatérale. Aussi on définit la fonction d'observation du spectre $Ob(S(f))$ qui représente le spectre d'amplitude, module de $S(f)$ limité aux fréquences positives, :

$$Ob(S(f)) = |S(f)| \quad \text{avec } f \geq 0$$

On considère un signal sinusoïdal $s(t)$ de fréquence F_0 (période $T_0 = 1/F_0$), ayant pour spectre $S(f)$. Le but de cette étude est d'obtenir une représentation spectrale réelle la plus proche possible de la représentation théorique $S(f)$, sachant que la limitation temporelle, l'échantillonnage et le calcul de la TFD modifieront la représentation spectrale.

Rappeler l'expression de $S(f)$. Caractériser le spectre $S(f)$ (discret ou continu, périodique ou non périodique). Donner l'expression de $Ob(S(f))$ et représenter ce spectre.

Le signal est mesuré pendant un temps τ égal à nT_0 (avec n pair). Ce signal limité temporellement $s_m(t)$ a pour spectre $S_m(f)$. En considérant la fenêtre de mesure répartie de façon symétrique par rapport au temps 0, donner l'expression mathématique du signal mesuré $s_m(t)$. Caractériser le spectre $S_m(f)$ (discret ou continu, périodique ou non périodique). Calculer la représentation spectrale $S_m(f)$ du signal mesuré $s_m(t)$. Donner l'expression de $Ob(S_m(f))$. Représenter l'allure générale de ce spectre en notant les points remarquables en fréquence. Discuter la symétrie du spectre représenté $Ob(S_m(f))$ par rapport à la droite $f = F_0$.

En prenant $F_0 = 1$ Hz et $n = 2$, représenter une allure plus précise du spectre $Ob(S_m(f))$ obtenu pour une fréquence limitée à 3 Hz et une amplitude maximale normée à 1. Donner la fréquence maximale contenue dans le signal $s_m(t)$ en utilisant la représentation simplifiée et limitée de la fonction $\text{sinc}(x)$ (figure 8.17).

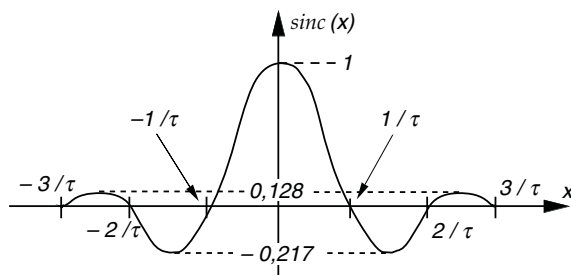


Figure 8.17. Représentation simplifiée de la fonction $\text{sinc}(x)$ utilisée pour les calculs.

Le signal mesuré $s_m(t)$ est échantillonné à une fréquence F_e (période $T_e = 1/F_e$). Le signal échantillonné, ainsi obtenu, est noté $s_{m,k}(t)$. Les échantillons, notés $s_{m,k}$ représentant la valeur $s_m(kT_e)$ ou $s(kT_e)$, sont au nombre de N . Donner d'une part l'expression mathématique non calculée du signal $s_{m,k}(t)$ en fonction de $s(t)$ et d'autre part l'expression du signal $s_{m,k}(t)$ en fonction de $s(kT_e)$. Calculer la représentation spectrale $S_{m,k}(f)$ du signal mesuré échantillonné $s_{m,k}(t)$. Caractériser le spectre $S_{m,k}(f)$ (discret ou continu, périodique ou non périodique). Donner l'expression de $Ob(S_{m,k}(f))$. Représenter l'allure générale de ce spectre en notant les points remarquables en fréquence.

En prenant $F_0 = 1$ Hz, $n = 2$ et $F_e = 4$ Hz, représenter une allure plus précise du spectre $Ob(S_{m,k}(f))$ obtenu pour une fréquence limitée à 3 Hz et une amplitude maximale normée à 1. On utilisera la représentation simplifiée et limitée de la fonction $\text{sinc}(x)$. Discuter brièvement la représentation spectrale obtenue. Proposer deux solutions pour améliorer fortement le résultat.

La représentation spectrale précédente ne peut pas être obtenue directement. En effet, la représentation spectrale de $s_{m,k}(t)$ est calculée à partir des N échantillons $s_{m,k}$ disponibles pour donner les n échantillons $S_{m,k}$ du spectre $S'_{m,k}(f)$. Les échantillons correspondant aux bornes de l'intervalle $[-nT_0/2, nT_0/2]$ sont pris en compte. En prenant $F_0 = 1$ Hz, $n = 2$ et $F_e = 4$ Hz, donner le nombre N d'échantillons $s_{m,k}$ et les N valeurs des échantillons $s_{m,k}$. Représenter $s_{m,k}(t)$. Déterminer la valeur de $s(t)$ pour $t = 0,125$ s à partir de la reconstitution idéale (théorème de l'échantillonnage). Comparer cette valeur avec la valeur exacte $\sin(2\pi/8)$. Pour le cas $F_0 = 1$ Hz, $n = 2$ et $F_e = 4$ Hz, calculer les N modules $|S_{m,k}|$ des échantillons $S_{m,k}$ du spectre $S'_{m,k}(f)$, en utilisant l'expression de la transformée de Fourier discrète. Représenter le spectre $Ob(S'_{m,k}(f))$ sur l'intervalle $[0, F_e]$ avec une amplitude maximale normée à 1 en supposant que le système de représentation graphique réalise une interpolation linéaire entre les points. Donner la précision en fréquence Δf de ce spectre. Comparer au spectre $Ob(S_m(f))$ précédemment obtenu.

Solution

On considère un signal sinusoïdal $s(t)$ de fréquence F_0 (période $T_0 = 1/F_0$), ayant pour spectre $S(f)$. L'expression de $Ob(S(f))$ est la suivante :

$$|S(f)| = \frac{1}{2}[\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)]$$

soit

$$Ob(S(f)) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f - F_0)$$

Le signal est mesuré pendant un temps τ égal à nT_0 (avec n pair). Ce signal limité temporellement $s_m(t)$ a pour spectre $S_m(f)$. En considérant la fenêtre de mesure répartie de façon symétrique par rapport au temps 0, l'expression mathématique du signal mesuré $s_m(t)$ est :

$$s_m(t) = s(t) \cdot \Pi_\tau(t) = s(t) \cdot \Pi_{nT_0}(t)$$

Le spectre $S_m(f)$, continu et non périodique, est donné par :

$$S_m(f) = \frac{j\tau}{2} \cdot \left[\frac{\sin(\pi\tau(f + F_0))}{\pi\tau(f + F_0)} - \frac{\sin(\pi\tau(f - F_0))}{\pi\tau(f - F_0)} \right]$$

À partir de cette relation donnant $S_m(f)$, on obtient l'expression de $Ob(S_m(f))$ avec $f \geq 0$ suivante :

$$Ob(S_m(f)) = \frac{\tau}{2} \cdot \left| \frac{\sin(\pi\tau(f + F_0))}{\pi\tau(f + F_0)} - \frac{\sin(\pi\tau(f - F_0))}{\pi\tau(f - F_0)} \right|$$

Il est important de remarquer que le spectre est non symétrique car la partie non représentée du spectre (pour $f < 0$) induit une déformation du spectre en particulier sur la partie basse du spectre (à gauche de F_0). Cette déformation sera d'autant moins grande que n sera grand.

En prenant $F_0 = 1$ Hz, $n = 2$ et une représentation simplifiée et limitée de la fonction $\text{sinc}(x)$ (figure 8.17, page 197), l'allure du spectre $Ob(S_m(f))$ obtenu pour une fréquence limitée à 3 Hz et une amplitude maximale normée à 1 est représentée sur la figure 8.18. La fréquence maximale contenue dans $Ob(S_m(f))$ est 2,5 Hz.

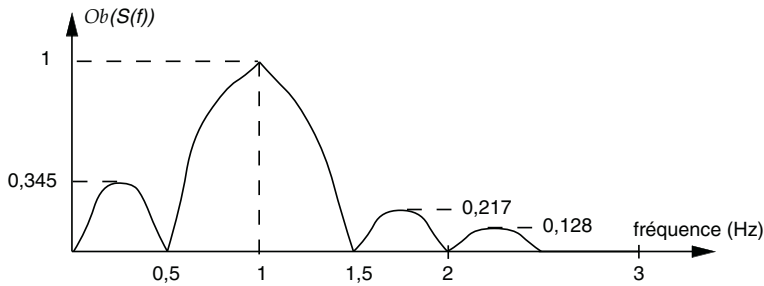


Figure 8.18. Allure de la fonction d'observation du spectre $S_m(f)$.

Le signal mesuré $s_m(t)$ est échantillonné à une fréquence F_e (période $T_e = 1/F_e$). Le signal échantillonné, ainsi obtenu, est noté $s_{m,k}(t)$. Les échantillons, notés $s_{m,k}$ représentant la valeur $s_m(kT_e)$ ou $s(kT_e)$, sont au nombre de N . L'expression mathématique non calculée du signal $s_{m,k}(t)$ en fonction de $s(t)$ et d'autre part l'expression du signal $s_{m,k}(t)$ en fonction de $s(kT_e)$ sont les suivantes :

$$s_{m,k}(t) = s(t) \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t) \cdot \Pi_\tau(t) = s(t) \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t) \cdot \Pi_{nT_0}(t)$$

$$s_{m,k}(t) = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

Le spectre $S_{m,k}(f)$, continu et périodique, est :

$$S_{m,k}(f) = \left[S(f) * \tau \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right] * [F_e \cdot \text{Pgn}_{F_e}(f)]$$

ou

$$S_{m,k}(f) = \frac{j\tau F_e}{2} \cdot \left[\frac{\sin(\pi \tau (f + F_0))}{\pi \tau (f + F_0)} - \frac{\sin(\pi \tau (f - F_0))}{\pi \tau (f - F_0)} \right] * \text{Pgn}_{F_e}(f)$$

ou encore

$$S_{m,k}(f) = \frac{j\tau F_e}{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin(\pi \tau (f + F_0 - kF_e))}{\pi \tau (f + F_0 - kF_e)} - \frac{\sin(\pi \tau (f - F_0 - kF_e))}{\pi \tau (f - F_0 - kF_e)} \right]$$

L'expression de $Ob(S_{m,k}(f))$, représentée sur la figure 8.19, page suivante, est :

$$Ob(S_{m,k}(f)) = \frac{\tau F_e}{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\left| \frac{\sin(\pi \tau (f + F_0 - kF_e))}{\pi \tau (f + F_0 - kF_e)} - \frac{\sin(\pi \tau (f - F_0 - kF_e))}{\pi \tau (f - F_0 - kF_e)} \right| \right]$$

avec $f \geq 0$

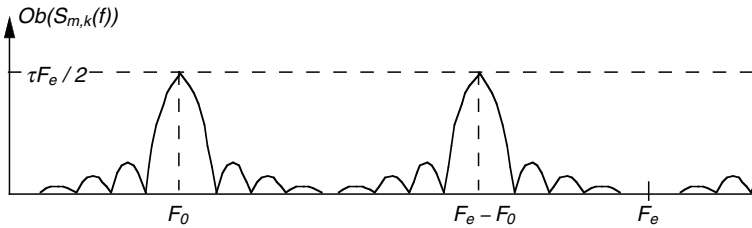


Figure 8.19. Allure de la fonction d'observation du spectre $S_{m,k}(f)$.

En prenant $F_0 = 1$ Hz, $n = 2$ et $F_e = 4$ Hz, l'allure plus précise du spectre $Ob(S_m(f))$, obtenu pour une fréquence limitée à 4 Hz et une amplitude maximale normée à 1, est représentée sur la figure 8.20. La représentation spectrale obtenue montre un recouvrement des spectres. Mais cette modification permet malgré tout de distinguer le pic correspondant à la fréquence F_0 du signal analogique. Pour éviter ce recouvrement, deux solutions sont possibles :

- 1/ augmenter la fréquence d'échantillonnage, soit dans notre cas $F_e > 5$ Hz ;
- 2/ filtrer le signal avant l'échantillonnage pour diminuer la fréquence maximale du signal. Dans le cas applicatif étudié, les fréquences supérieures à 1,5 Hz ne sont pas utiles ; il serait donc envisageable de les filtrer.

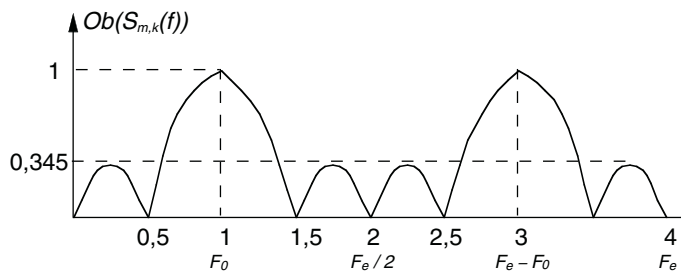


Figure 8.20. Fonction d'observation du spectre $S_{m,k}(f)$ dans le cas $F_0 = 1$ Hz, $n = 2$ et $F_e = 4$ Hz.

La représentation spectrale précédente ne peut pas être obtenue directement. En effet, la représentation spectrale de $s_{m,k}(t)$ est calculée à partir des N échantillons $s_{m,k}$ disponibles pour donner les N échantillons $S_{m,k}$ du spectre $S'_{m,k}(f)$. Les échantillons correspondant aux bornes de l'intervalle $[-nT_0/2, nT_0/2]$ sont pris en compte. En prenant $F_0 = 1$ Hz, $n = 2$ et $F_e = 4$ Hz, le nombre N d'échantillons $s_{m,k}$ sur l'intervalle $[-T_0, T_0]$ est donné par :

$$N = nT_0F_e + 1 = 9$$

Les 9 valeurs des points échantillonnés sont données par la définition de $s_{m,k} = \sin(2\pi kT_e)$ avec k variant de -4 à 4 :

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$s_{m,k}$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

La position de ces points est représentée graphiquement sur la figure 8.21, page ci-contre.

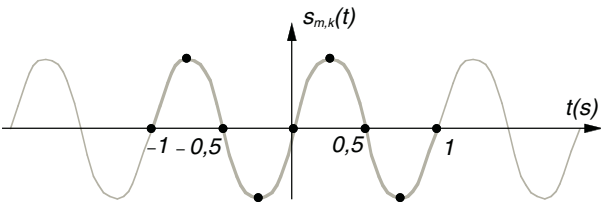


Figure 8.21. Points échantillonnés du signal $s_{m,k}(t)$.

Pour $t = 0,125$ s, la valeur de $s(t)$, calculée à partir de la reconstitution idéale (théorème de l'échantillonnage), est la suivante :

k	$s_{m,k}$	$\text{sinc}(x)$	$s_{m,k} \text{sinc}(x)$
-4	0	0,0707	0,0000
-3	1	-0,0909	-0,0909
-2	0	0,1273	0,0000
-1	-1	-0,2122	0,2122
0	0	0,6366	0,0000
1	1	0,6366	0,6366
2	0	-0,2122	0,0000
3	-1	0,1273	-0,1273
4	0	-0,0909	0,0000
$s(t)$			0,6306

Si on compare cette valeur à la valeur exacte $\sin(2\pi/8) = 0,707$, on trouve une différence importante. Cette différence peut être fortement atténuée en réalisant un calcul à partir de 17 échantillons (cas $n = 4$). Soit une valeur de $s(t)$ égale à 0,6678.

Pour le cas $F_0 = 1$ Hz, $n = 2$ et $F_e = 4$ Hz, les N modules $|s_{m,k}|$ des échantillons $s_{m,k}$ du spectre $S'_{m,k}(f)$ peuvent être calculés en utilisant l'expression de la TFD :

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$s_{m,k}$	0	0	4	0	0	0	4	0	0

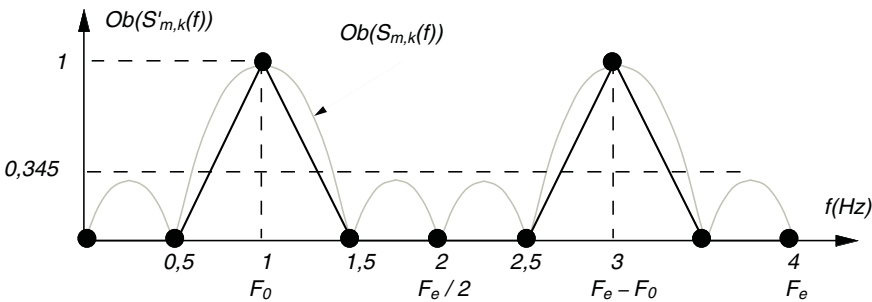


Figure 8.22. Fonction d'observation du spectre $S_{m,k}(f)$ dans le cas $F_0 = 1$ Hz, $n = 2$ et $F_e = 4$ Hz.

En supposant une interpolation linéaire entre les points, le spectre $Ob(S'_{m,k}(f))$ sur l'intervalle $[0, F_e]$ avec une amplitude maximale normée à 1 est représenté sur la figure 8.22, page précédente. La précision sur le spectre est : $\Delta f = 0,5$ Hz. Si on compare avec le spectre $Ob(S_m(f))$, on constate que la précision fréquentielle conduit à ne représenter que les points de passage par zéro du spectre $Ob(S_m(f))$. Si l'on désire une représentation plus détaillée, il est nécessaire d'augmenter la précision, c'est dire augmenter le nombre de points utilisés. Cela peut être simplement réalisé en ajoutant des échantillons de valeur nulle et calculer la DFT sur tous les échantillons. Si à N échantillons, on ajoute N zéros, la précision va être divisée par 2.

Chapitre 9

Notions de filtrage numérique

9.1 INTRODUCTION

9.1.1 Définition du filtrage numérique

On appelle « *filtre numérique* » un système utilisé pour modifier la distribution fréquentielle d'un signal numérique selon des spécifications données. Un filtre numérique peut être vu comme un procédé de calcul permettant de transformer un signal numérique d'entrée (séquence de nombres) en un signal numérique de sortie (seconde séquence de nombres) pour obtenir la modification voulue du signal. Le problème du filtrage numérique consiste donc à déterminer l'équation régissant cette transformation des signaux numériques qui d'une part doit représenter la réponse fréquentielle spécifiée et d'autre part peut être effectivement réalisée. La transformation peut être implantée sous forme de logiciel (algorithme) ou matériel (circuits électroniques).

Les filtres numériques sont, pour les signaux échantillonnés, les équivalents des filtres analogiques pour les signaux continus. En raison du développement des circuits intégrés rapides, les filtres numériques deviennent plus intéressants que les filtres analogiques en apportant de nombreux avantages : précision, fiabilité, stabilité, adaptabilité et facilité de commande.

Le problème se pose de la même manière que pour les filtres analogiques. Il consiste à réaliser un filtre donnant une réponse fréquentielle $H(f)$ donnée (prédéfinie à l'aide d'un gabarit : plan de Bode, etc.), une réponse impulsionnelle $h(t)$ fixée ou éventuellement une réponse indicielle voulue.

Dans le cas général de ces filtres, la valeur de la sortie numérique $y(kT_e) = y_k$ à l'instant kT_e est fonction de l'entrée $x(kT_e) = x_k$ au même instant kT_e , des n entrées numériques précédentes $x(iT_e) = x_i$ pour tout $i \in \{k-1, \dots, k-N\}$ et de plus des sorties numériques précédentes $y(iT_e) = y_i$ pour tout $j \in \{k-1, \dots, k-N\}$ (figure 9.1) :

$$y_k = F_{\text{onction}}(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-N}, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-N})$$

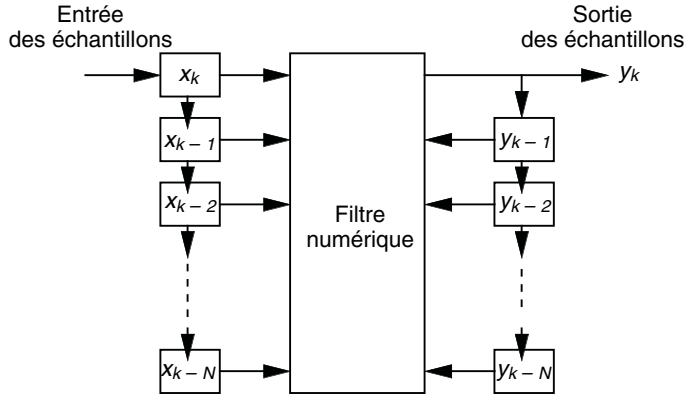


Figure 9.1. Représentation schématique d'un filtre numérique.

Les notions de filtrage numérique abordées concerneront principalement des systèmes linéaires invariants : la sortie d'un tel système est liée à l'entrée par l'opération de convolution (paragraphe 3.3). Cela impose que la fonction générale précédente donnant les échantillons de sortie y_k soit une combinaison linéaire de n éléments d'entrée ou de sortie précédents x_i et y_i :

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-j} \quad (9.1)$$

Cette équation générale des filtres numériques est appelée *équation aux différences*. À partir de cette expression, nous pouvons distinguer deux grandes familles de filtres (figure 9.2, page ci-contre) : les *filtres non récurrents* pour lesquels tous les coefficients b_i sont nuls et les *filtres récurrents* pour lesquels au moins un coefficient b_i est non nul. Ces derniers sont encore définis comme des filtres possédant une boucle de contre-réaction.

Pour les filtres non récurrents, l'équation est donc limitée à :

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} \quad (9.2)$$

Mais dans le cadre des systèmes linéaires invariants, nous pouvons utiliser l'équation de convolution discrète, établie au paragraphe 8.4.2, qui est liée aux échantillons

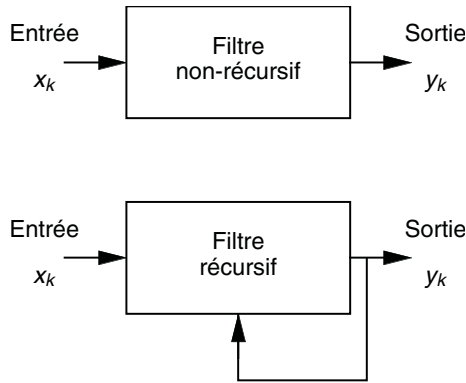


Figure 9.2. Filtres non-récurifs et récursifs.

de la réponse impulsionnelle h_i :

$$y_k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_i \cdot x_{k-i} \quad (9.3)$$

Cette équation de convolution amène à définir deux types de filtres numériques : les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou filtres à moyenne ajustée (MA) pour lesquels il sera possible d'utiliser l'équation 9.3 qui doit être alors limitée au domaine d'existence de la réponse impulsionnelle ; soit la forme :

$$y_k = \sum_{i=0}^N h_i \cdot x_{k-i} \quad (9.4)$$

Ainsi les filtres à réponse impulsionnelle finie pourront être réalisés directement à partir de filtres non récursifs. En effet l'équation 9.4 correspond à l'équation 9.2 pour laquelle les coefficients a_i sont les valeurs échantillonnées h_i de la réponse impulsionnelle $h(t)$. Il est important de noter que ces filtres peuvent aussi être réalisés à partir de filtres récursifs.

L'autre catégorie de filtres numériques est celle des filtres dits à réponse impulsionnelle infinie (RII) ou filtres généraux (ARMA), pour lesquels la relation 9.4 ne sera pas applicable ; il sera nécessaire d'utiliser l'équation générale 9.1. Il est possible de définir une catégorie particulière des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie, appelés filtres autorégressifs (AR) pour lesquels nous avons la relation suivante (cas particulier de la relation 9.1) :

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-j}$$

Enfin il ne faut pas oublier que, comme pour les filtres analogiques et puisque nous disposons d'une transformée de Fourier discrète (TFD), il est possible d'appliquer le produit dans l'espace des fréquences discrètes après une TFD et un retour dans l'espace des temps discrets par une transformée de Fourier discrète inverse. Nous avons ainsi le même schéma de la figure 9.3 que celui présenté au paragraphe 4.3.1.

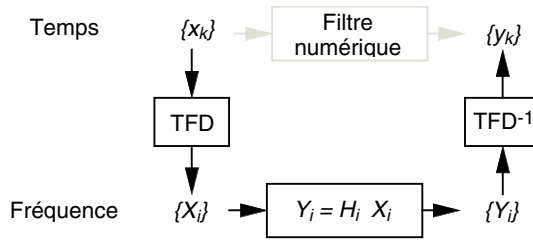


Figure 9.3. Réalisation d'un filtre numérique par transformée de Fourier discrète (H_i : fonction de transfert discrète du filtre numérique).

La conception et la réalisation des filtres numériques doivent être abordées selon les trois aspects essentiels suivants :

- Modèle du filtre numérique : modèle obtenu par analogie avec un filtre analogique ou modèle direct dans des cas spécifiques ;
- Synthèse du filtre numérique basée sur l'équation aux différences (cas général), l'équation de convolution pour les filtres à réponse impulsionnelle finie ou la transformée de Fourier discrète ;
- Réalisation du filtre numérique : algorithme ou composants électroniques numériques.

nous allons introduire un autre outil permettant un traitement plus facile des signaux discrets, en particulier dans le cadre des filtres numériques dont la synthèse est basée sur l'utilisation de l'équation aux différences : la transformée en z .

9.1.2 Transformée en z

Dans le cas des signaux analogiques, on dispose de transformées (transformée de Fourier ou transformée de Laplace) permettant d'étudier et de traiter les signaux dans des domaines plus aisés (respectivement plan fréquentiel ou domaine de Laplace). Dans le cas des signaux discrets, ces transformées sont très limitées, en particulier pour les signaux possédant une infinité d'échantillons.

Pour cela, une transformée des signaux discrets a été introduite : la transformée en z . Cette transformée en z , notée $S(z)$, d'un signal $s(t)$ causal, échantillonné à la période T_e , s'exprime à l'aide de la variable complexe z selon la relation suivante (annexe F) :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \cdot z^{-k} \quad (9.5)$$

L'origine de cette transformée en z s'explique en considérant le calcul de la transformée de Laplace d'un signal échantillonné causal. Soit le signal causal $s(t)$ échantillonné à la fréquence F_e , le signal échantillonné s'exprime par :

$$s_e(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

La transformée de Laplace $S(p)$ de ce signal échantillonné causal $s_e(t)$, obtenue en remplaçant $j2\pi f$ par p dans la transformée de Fourier, est :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s_e(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) \right] \cdot e^{-pt} \cdot dt$$

Étant donné les propriétés de $\delta(t)$, il vient :

$$S(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot e^{-pkT_e}$$

En effectuant le changement de variables $z = e^{pT_e}$, nous retrouvons la transformée en z du signal $s(t)$ définie par la relation 9.5.

La propriété la plus importante de cette transformée est le retard temporel. Connaissant la transformée en $zS(z)$ d'un signal $s(t)$, on cherche à obtenir la transformée en z du même signal $s(t)$ retardé du temps mT_e : $s(t - mT_e)$. Connaissant l'expression 9.5, il vient :

$$s(t) \xrightarrow{z} S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot z^{-k} \quad \text{et} \quad s(t - mT_e) \xrightarrow{z} \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e - mT_e) \cdot z^{-k}$$

En posant $k' = k - m$ et étant donné que le signal $s(t)$ est causal, nous obtenons le résultat suivant :

$$s(t - mT_e) \xrightarrow{z} \sum_{k'=-m}^{+\infty} s(k'T_e) \cdot z^{-k'-m} = \left[\sum_{k'=0}^{+\infty} s(k'T_e) \cdot z^{-k'} \right] \cdot z^{-m} = S(z) \cdot z^{-m}$$

Ainsi, « z^{-1} » est appelé l'opérateur retard et fait correspondre à un signal le même signal retardé d'un échantillon (figure 9.4).

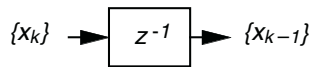


Figure 9.4. Opérateur retard unité de la transformée en z .

9.1.3 Filtrage numérique simple : lissage temporel

Avant d'étudier la mise en place de filtre numérique à partir des relations 9.1 et 9.4, la capacité de calcul qu'offrent les systèmes numériques permet de réaliser des opérations numériques de filtrage linéaire simple comme la moyenne temporelle glissante d'ordre N . Ce type de traitement numérique va permettre de réaliser un « lissage » du signal d'entrée conduisant par exemple à la suppression d'un bruit résiduel ou à l'atténuation d'un bruit de type impulsif. Par contre ce type de traitement

peut modifier fortement le signal informatif. La plus courante de ces techniques est donc la moyenne temporelle glissante d'ordre N , appelé aussi profondeur de lissage, qui s'exprime par :

$$y_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_{k-i}$$

Nous pouvons remarquer que cette opération correspond à l'équation aux différences 9.2 des filtres non récurrents pour laquelle les coefficients a_i sont tous égaux à $1/N$.

L'utilisation de cette technique de lissage temporel sur un signal de bruit blanc donne de bons résultats. Soit un bruit blanc uniforme d'amplitude variant entre -1 et $+1$ avec une moyenne nulle et un écart type de $0,6$, l'amplitude du bruit peut être diminuée jusqu'à un intervalle $[-0,6, +0,6]$ avec un écart type de $0,18$ dans le cas de 10 valeurs moyennées (figures 9.5 et 9.6). Plus le nombre N de valeurs moyennées sera grand, meilleur sera le lissage ; par contre le signal informatif est lui aussi moyenné et perd donc de l'information.

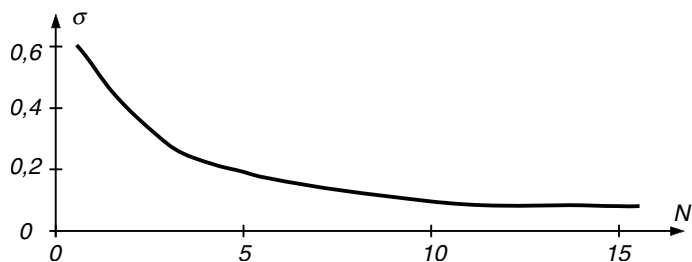


Figure 9.5. Résultat sur l'écart type d'un traitement par lissage temporel d'un bruit blanc uniforme en fonction du nombre N de valeurs moyennées.

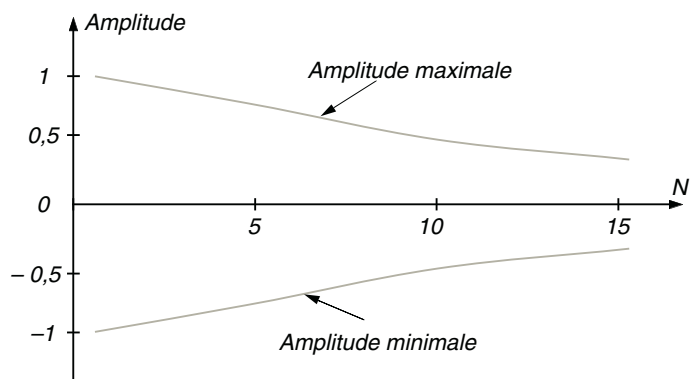


Figure 9.6. Résultat sur l'amplitude d'un traitement par lissage temporel d'un bruit blanc uniforme en fonction du nombre N de valeurs moyennées.

Pour illustrer ce phénomène, prenons l'exemple de deux signaux classiques : créneau et impulsion de largeur unité, modélisant un pic. Dans les deux cas, la

transition brusque du créneau ou le pic de l'impulsion sont fortement atténués par le lissage (figure 9.7). Dans cet exemple où la profondeur de lissage est de 10, nous voyons que le pic ou impulsion est quasiment éliminé, mais le créneau maintient sa valeur maximale en ayant toutefois des pentes très affaiblies.

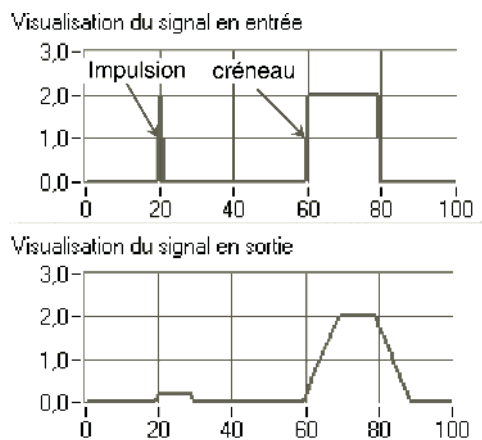


Figure 9.7. Effet d'un traitement par lissage temporel sur un signal composite formé d'un signal impulsion de durée unité suivi d'un créneau.

Un exemple plus complet, présenté sur la figure 9.8, montre l'effet du lissage sur un signal quelconque bruité ou non avec deux valeurs de profondeur de lissage.

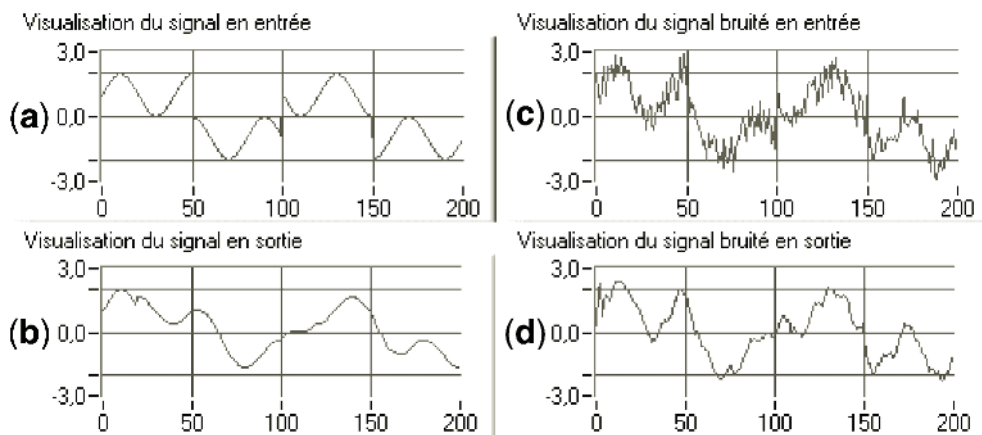


Figure 9.8. Effet d'un traitement par lissage temporel sur un signal quelconque : signal initial (a), signal lissé avec une profondeur de 20 (b), signal initial bruité (c) et signal bruité et lissé avec une profondeur de 5 (d).

Nous verrons à la fin du chapitre une méthode permettant de conserver les transitions (technique de la valeur médiane). En conclusion cette technique est efficace

sur les signaux lentement variables par rapport aux bruits qui doivent être éliminés (bruit blanc, bruit de type impulsif...).

9.2 SYNTHÈSE DES FILTRES NUMÉRIQUES À RÉPONSE IMPULSIONNELLE INFINIE

La conception et la réalisation des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie sont essentiellement basées sur la fonction de transfert $H(z)$: gabarit de filtrage de type passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande. La première étape est donc l'obtention de cette fonction de transfert à partir de l'équation aux différences.

9.2.1 Équation aux différences

Nous considérons des filtres numériques linéaires et invariants dans le temps correspondant aux filtres analogiques décrits par des équations différentielles à coefficients constants de la forme :

$$\alpha_0 x(t) + \alpha_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + \alpha_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} = \beta_0 y(t) + \beta_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + \beta_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

Dans cette hypothèse, les systèmes sont représentés par des équations aux différences de la forme (équation 9.1) :

$$y_k = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} - \sum_{j=1}^N b_j \cdot y_{k-j} \quad \text{ou} \quad \sum_{j=0}^N b_j \cdot y_{k-j} = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} \quad \text{avec } b_0 = 1$$

Cette équation aux différences est une équation linéaire à coefficients constants d'ordre N du filtre numérique où y_k et x_k sont respectivement le signal de sortie (réponse) et le signal d'entrée (excitation).

En appliquant la transformée en z à l'équation générale précédente et soient $Y(z)$ et $X(z)$ les transformées en z de y_k et x_k , il vient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^N b_j \cdot y_{k-j} \right] z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{i=0}^N a_i \cdot x_{k-i} \right] z^{-k}$$

soit

$$Y(z) \cdot \sum_{j=0}^N b_j \cdot z^{-j} = X(z) \cdot \sum_{i=0}^N a_i \cdot z^{-i}$$

Par analogie avec les filtres analogiques, un filtre numérique peut être caractérisé par sa fonction de transfert en z ou « transmittance » en z , $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i \cdot z^{-i}}{\sum_{j=0}^N b_j \cdot z^{-j}} \quad (9.6)$$

ou dans le cas d'un filtre non-récursif :

$$H(z) = \sum_{i=0}^N a_i \cdot z^{-i} \quad (9.7)$$

Ensuite la question fondamentale à résoudre est comment obtenir $H(z)$ pour des caractéristiques bien définies (gain, phase...) correspondant par exemple à un filtre analogique défini par son équation différentielle ou par sa fonction de transfert $H(p)$: c'est le domaine très vaste de la synthèse des filtres numériques. Les méthodes qui permettent de déterminer une fonction de transfert $H(p)$ répondant à des spécifications données de gain et de phase ou à des réponses impulsionnelles ou indicielles sont bien connues dans le cas des filtres analogiques. Une première approche à cette problématique est de réaliser une transposition du filtre analogique en filtre numérique.

9.2.2 Synthèse des filtres numériques par transformation de $H(p)$ en $H(z)$

Le procédé le plus utilisé pour calculer la fonction de transfert d'un filtre numérique, consiste à transposer la fonction de transfert $H_p(p)$ de son homologue analogique du plan « p » dans le plan « z » par une règle de transformation reliant p à z . Pour réaliser cette transformation et déterminer la fonction de transfert $H_z(z)$ dans le plan z , il suffit de définir une relation $p = F_{\text{onction}}(z)$, d'où :

$$H_z(z) = H_p(p = F_{\text{onction}}(z))$$

La relation exacte entre p et z est donnée par la définition même de la transformée en z vue dans le paragraphe précédent :

$$z = e^{pT_e}$$

soit

$$p = \frac{1}{T_e} \cdot \text{Ln}(z) \quad (9.8)$$

Dans le domaine étudié des filtres linéaires invariants, $H_p(p)$ se présente sous la forme d'un quotient de deux polynômes en p . Mais si on réalise la transformation de $H_p(p)$ en $H_z(z)$ en utilisant la relation 8.8, la forme résultante de $H_z(z)$ ne sera pas un quotient de deux polynômes en z . Comme nous l'étudierons, cela conduit à des difficultés de réalisation. Aussi, il est nécessaire de rechercher une règle de transformation qui permet de conserver la forme « quotient de deux polynômes ».

De nombreuses méthodes ont été développées pour réaliser cette transformation. Elles correspondent à différents types d'analogie dans le sens où une méthode va privilégier telle ou telle propriété : gain, réponse impulsionnelle, réponse indicielle, etc. Ainsi, les principales méthodes sont les suivantes :

- transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle ;
- méthode de l'invariance indicielle ;

- transformation adaptée ;
- transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation ;
- transformation homographique ou équivalence de l'intégration.

Pour chacune de ces transformations, nous décrirons brièvement la méthode pour transformer $H(p)$ en $H(z)$, les conditions pour pouvoir réaliser cette transformation et, enfin, les avantages et inconvénients de cette méthode.

a) Transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle

Par cette méthode on obtient un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle est égale à la réponse impulsionnelle échantillonnée du filtre analogique correspondant. En considérant la fonction de transfert $H(p)$ ou $H(f)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre analogique, la réponse impulsionnelle, échantillonnée à la période T_e , s'exprime par :

$$h_e(t) = T_e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} h(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

Le coefficient T_e correspond au fait que la réponse impulsionnelle étant échantillonnée, la fonction de transfert est périodisée avec la fréquence F_e . Soit la relation :

$$H_e(f) = H(f) * \text{Pgn}_{F_e}(f) \quad \text{d'où} \quad h_e(t) = h(t) \cdot [T_e \cdot \text{Pgn}_{T_e}(t)]$$

Par conséquent la transformée en z $H_e(z)$ de $h_e(t)$ est donnée par :

$$H_e(z) = T_e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} h(kT_e) \cdot z^{-k}$$

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{a_i}{p - p_i}$$

La transformée de Laplace inverse nous donne la réponse impulsionnelle du filtre analogique :

$$h(t) = a_i \cdot e^{p_i t}$$

Ainsi la transformation à réaliser pour obtenir le filtre numérique à partir du filtre analogique caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$ est :

$$\frac{1}{p - p_i} \longrightarrow T_e \cdot \frac{1}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (9.9)$$

Si un filtre quelconque peut s'exprimer sous la forme de r filtres du premier ordre en parallèle, cette méthode consiste à réaliser dans $H(p)$ la transformation suivante :

$$H(p) = \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{p - p_i} \longrightarrow H(z) = \sum_{i=0}^r T_e \cdot \frac{a_i}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (9.10)$$

La transformation standard ou méthode de l'invariance impulsionnelle est caractérisée par :

- condition : la fréquence de coupure haute du filtre doit être très inférieure à la fréquence de Shannon ;
- domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres passe-bas ou des filtres passe-bande ;
- inconvénient : le principal inconvénient réside dans le fait qu'il faille réaliser la décomposition en éléments simples pour calculer l'équation aux différences du filtre numérique.

b) Méthode de l'invariance indicielle

Par cette méthode on obtient un filtre numérique dont la réponse indicielle est égale à la réponse indicielle échantillonnée du filtre analogique correspondant. La réponse indicielle $s_{\text{ind}}(t)$ s'obtient en utilisant la relation suivante (équation 4.10) :

$$s_{\text{ind}}(t) = h(t) * u(t)$$

La fonction $u(t)$ est la fonction unité ou échelon d'Heaviside, précédemment étudiée, qui a pour transformée de Laplace $1/p$. La transformée en z de cette fonction est très simple à établir :

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(kT_e) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Les transformées de Laplace et en z de l'équation donnant $s_{\text{ind}}(t)$ sont respectivement :

$$S_{\text{ind}}(p) = H(p) \cdot U(p) = \frac{H(p)}{p} \quad \text{et} \quad S_{\text{ind}}(z) = H(z) \cdot U(z) = H(z) \cdot \frac{z}{z - 1}$$

En considérant que $[H(p)/p]$ peut être mis sous la forme d'une somme d'éléments simples du premier ordre, nous pouvons utiliser la transformation précédente (équation 9.9). Mais à cette expression $[H(p)/p]$ correspond $[H(z)(z/1 - z)]$, par conséquent, nous considérerons la transformation suivante :

$$\frac{1}{p - p_i} \longrightarrow \frac{z - 1}{z} \cdot \frac{T_e}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (9.11)$$

Ainsi, pour un filtre quelconque s'exprimant sous la forme de r filtres du premier ordre en parallèle, nous avons la relation complète donnant $H(z)$:

$$H(p) = \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{p - p_i} \longrightarrow H(z) = \left[T_e \cdot \frac{z - 1}{z} \right] \sum_{i=0}^r \frac{a_i}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (9.12)$$

La transformation par la méthode de l'invariance indicielle est caractérisée par :

- condition : la fréquence de coupure haute du filtre doit être inférieure à la fréquence de Shannon ;

- domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres passe-bas ou des filtres passe-bande ;
- inconvénient : le principal inconvénient réside dans le fait qu'il faille réaliser la décomposition en éléments simples pour calculer l'équation aux différences du filtre numérique.

c) Transformation adaptée

Par cette méthode, appelée aussi *matched transform*, on obtient un filtre numérique dont les pôles de la fonction de transfert ou transmittance sont conservés. En considérant que $H(p)$ est sous la forme d'un produit d'éléments simples du premier ordre (filtre analogique ne présentant que des pôles), cette méthode consiste à réaliser dans $H(p)$ la transformation identique à la précédente, c'est-à-dire (équation 9.9) :

$$\frac{1}{p - p_i} \longrightarrow T_e \cdot \frac{1}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}}$$

Pour un filtre quelconque s'exprimant sous la forme de r filtres du premier ordre en série, nous obtenons alors la relation complète :

$$H(p) = \prod_{i=0}^r \frac{a_i}{p - p_i} \longrightarrow H(z) = T_e \cdot \prod_{i=0}^r \frac{a_i}{1 - e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}} \quad (9.13)$$

d) Transformation d'Euler ou équivalence de la dérivation

Étant donné une équation différentielle reliant deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, la méthode, qui correspond à une démarche classique en analyse numérique, consiste à donner une approximation de la dérivée d'une fonction continue. Dans le cas de la transformation d'Euler, l'approximation réalisée est la plus simple :

$$y(t) = \frac{dx}{dt} \longrightarrow y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

Cette approximation correspond également à l'approximation d'une intégrale par la « méthode des rectangles » :

$$x(t) = \int_0^t y(t) \cdot dt \longrightarrow x_k = x_{k-1} + T_e \cdot y_k$$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle initiale est :

$$Y(p) = p \cdot X(p) \quad \text{d'où} \quad H(p) = p$$

La transformée en z de l'équation différentielle initiale discrétisée est :

$$Y(z) = \frac{1}{T_e} \cdot [X(z) - X(z) \cdot z^{-1}] = \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \cdot X(z)$$

soit

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Cette méthode consiste donc à réaliser dans $H(p)$ la transformation suivante :

$$p \longrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \quad (9.14)$$

La transformation d'Euler ou par équivalence à la dérivation est caractérisée par :

- domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres analogiques simples ;
- inconvénient : le principal inconvénient est la distorsion des caractéristiques en hautes fréquences.

e) Transformation homographique ou équivalence de l'intégration

De la même manière que précédemment, cette méthode consiste à donner une approximation de l'intégrale d'une fonction continue. Dans ce cas, l'approximation réalisée est celle de la « méthode des trapèzes » :

$$x(t) = \int_0^t y(t) \cdot dt \longrightarrow x_k = x_{k-1} + \frac{T_e}{2} \cdot [y_k + y_{k-1}]$$

La transformée en z de l'équation différentielle discrétisée est :

$$X(z) = X(z) \cdot z^{-1} + \frac{T_e}{2} \cdot [Y(z) + Y(z) \cdot z^{-1}]$$

soit

$$H(z) = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{[1 - z^{-1}]}{[1 + z^{-1}]}$$

Soit après une transformation en z , cette méthode consiste donc à réaliser dans $H(p)$ la transposition suivante :

$$p \longrightarrow \frac{2}{T_e} \cdot \frac{[1 - z^{-1}]}{[1 + z^{-1}]} \quad (9.15)$$

La transformation homographique ou par équivalence à l'intégration ou encore appelée transformation bilinéaire est caractérisée par :

- domaine d'application : ce type de synthèse de filtre numérique s'applique à des filtres dont la caractéristique fréquentielle est constante dans des domaines de fréquences données ;
- avantage : le principal avantage de ce filtre est sa stabilité.

La synthèse de deux filtres analogiques à réponse impulsionnelle infinie (filtre passe-bas du premier ordre et filtre passe-bas du deuxième ordre) est présentée à la fin de ce chapitre avec les deux dernières transformations étudiées (transformation par équivalence à la dérivation et transformation par équivalence à l'intégration).

9.3 SYNTHÈSE DES FILTRES NUMÉRIQUES À RÉPONSE IMPULSIONNELLE FINIE

La convolution intervient dans tous les systèmes de filtrage linéaire et consiste en la modification du signal d'entrée par la caractéristique temporelle du système ou réponse impulsionnelle. Le filtre analogique, étant défini par sa fonction de transfert $H(p)$ et sa réponse impulsionnelle $h(t)$, le signal de sortie $y(t)$ du filtre soumis au signal d'entrée $x(t)$ est donné par la relation connue : $y(t) = x(t) * h(t)$.

Dans le cas de filtre à réponse impulsionnelle finie, le filtrage numérique par convolution correspond à une sommation pondérée des valeurs du signal d'entrée $x(kT_e) = x_k$ par la suite des coefficients de la réponse impulsionnelle discrète $h(kT_e) = h_k$ du filtre selon la relation 9.4. La réponse impulsionnelle ayant une durée finie, le nombre d'échantillons est limité. Soit N le nombre de valeurs de h_k connues :

$$y_k = \sum_{i=0}^{N-1} h_i \cdot x_{k-i} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot h_{k-i} \quad (9.16)$$

Dans beaucoup de réalisations de filtre numérique, le point de départ est la réponse fréquentielle du filtre $H(f)$ donnée par un gabarit. Partant de cette réponse fréquentielle discrétisée $H_e(f)$, il est aisé d'obtenir la réponse impulsionnelle discrétisée $h_e(t)$ par transformée de Fourier discrète. La discrétisation de la réponse impulsionnelle a conduit à la périodisation du spectre comme nous l'avons vu dans le chapitre 7, soit :

$$H_e(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} H(f - kF_e)$$

d'où la forme de $h_e(t)$, calculée sur N points, pour conserver la réponse fréquentielle :

$$h_e(t) = T_e \cdot \sum_{-N/2}^{N/2-1} h_k \cdot \delta(t - kT_e) = \sum_{-N/2}^{N/2-1} (T_e \cdot h_k) \cdot \delta(t - kT_e) = \sum_{-N/2}^{N/2-1} h'_k \cdot \delta(t - kT_e)$$

Ainsi les échantillons de la réponse impulsionnelle $h_e(t)$ sont h'_k . Dans le cas où la réponse impulsionnelle obtenue n'est pas causale, il est possible de retarder cette réponse impulsionnelle de $N/2$ points pour rendre le filtre causal :

$$h_e(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h'_{k-N/2} \cdot \delta(t - kT_e)$$

Un exemple basé sur cette synthèse des filtres à réponse impulsionnelle finie est présenté à la fin de ce chapitre.

9.4 RÉALISATION DES FILTRES NUMÉRIQUES

À partir de l'expression de la transmittance en z du filtre numérique ou de l'équation de convolution, il faut concevoir l'algorithme du calcul ou la structure matérielle permettant de réaliser ce filtre.

La réalisation des filtres numériques peut être faite en utilisant les trois éléments de base (matériel ou logiciel) suivants :

- additionneur, { symbolisé par Σ } ;
- multiplieur, { symbolisé par $\times$ } ;
- retard de T_e : échantillon k par rapport à $k - 1$, { symbolisé par T }. Cette opération sera réalisée matériellement par des registres à décalage.

9.4.1 Filtres numériques synthétisés par $H(z)$

À partir de la fonction de transfert $H(z)$, obtenue selon les différentes transformations possibles, diverses structures peuvent être utilisées : structure *directe* (implémentation de l'équation aux différences), structure *canonique* (structure directe avec minimisation des composants) et structure *en éléments simples*.

a) Structure directe

Cette structure est l'application directe des expressions de la transmittance $H(z)$. Dans le cas d'un filtre non-récuratif, une des structures possibles est celle représentée sur le schéma de la figure 9.9 qui traduit l'équation 9.2.

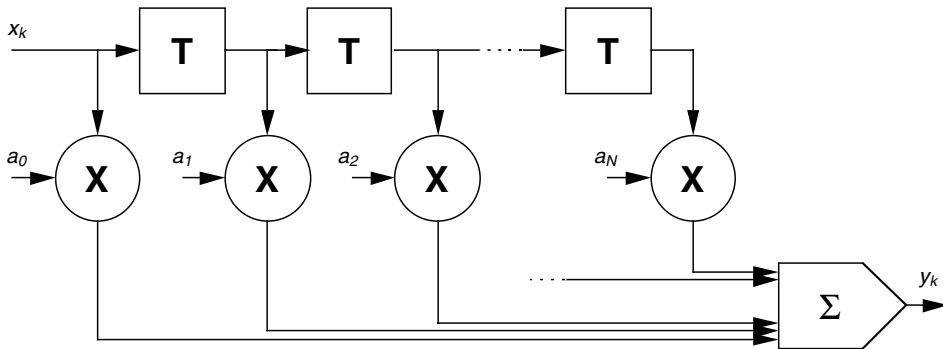


Figure 9.9. Structure directe d'un filtre numérique non-récuratif.

De même, la traduction directe de l'expression de $H(z)$ pour un filtre récursif donne le schéma de la figure 9.10, page suivante, qui traduit l'équation générale 9.1.

b) Structure canonique

Cette forme permet de minimiser le nombre d'éléments utilisés dans la réalisation du filtre. L'équation générale peut s'écrire sous la forme :

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = W(z) \cdot V(z)$$

avec

$$W(z) = \sum_{j=0}^N a_j \cdot z^{-j} \quad \text{système non récursif}$$

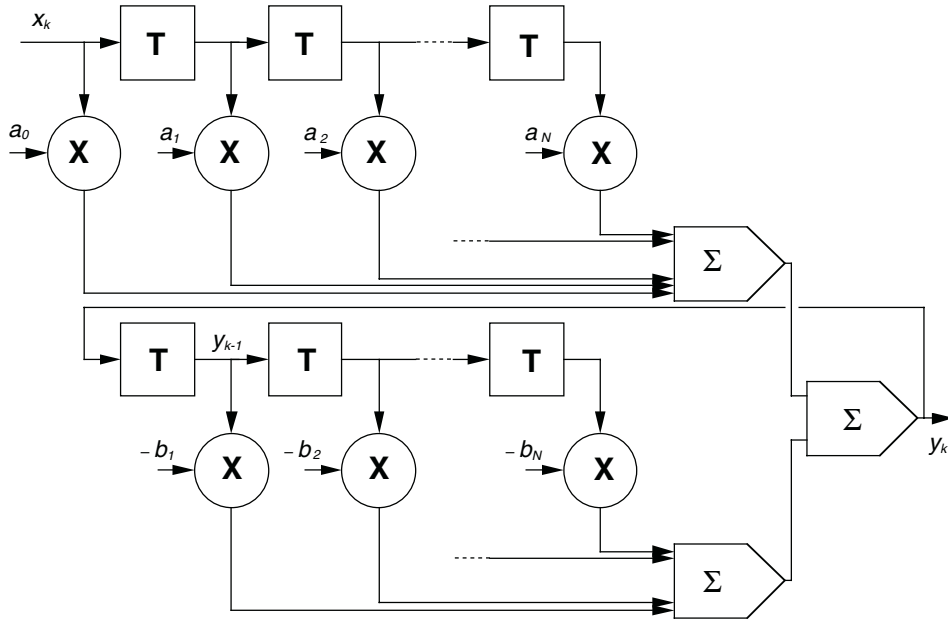


Figure 9.10. Structure directe d'un filtre numérique récursif.

et

$$V(z) = \frac{X(z)}{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}}$$

L'expression de $Y(z)$ est donc :

$$Y(z) = \left[\sum_{j=0}^N a_j \cdot z^{-j} \right] \cdot V(z)$$

En prenant la transformée en z inverse, on obtient l'expression de y_k en fonction de la valeur intermédiaire v_k qui est utilisée pour construire la structure de ce filtre (figure 9.11, page ci-contre) :

$$y_k = \sum_{j=0}^N a_j \cdot v_{k-j}$$

Le résultat montre qu'une seule structure retard est nécessaire pour la réalisation de ce filtre numérique.

c) Structure en composants simples

Il est possible d'exprimer $H(z)$ à partir d'éléments de base ou de composants simples du premier ou du second ordre $H_i(z)$:

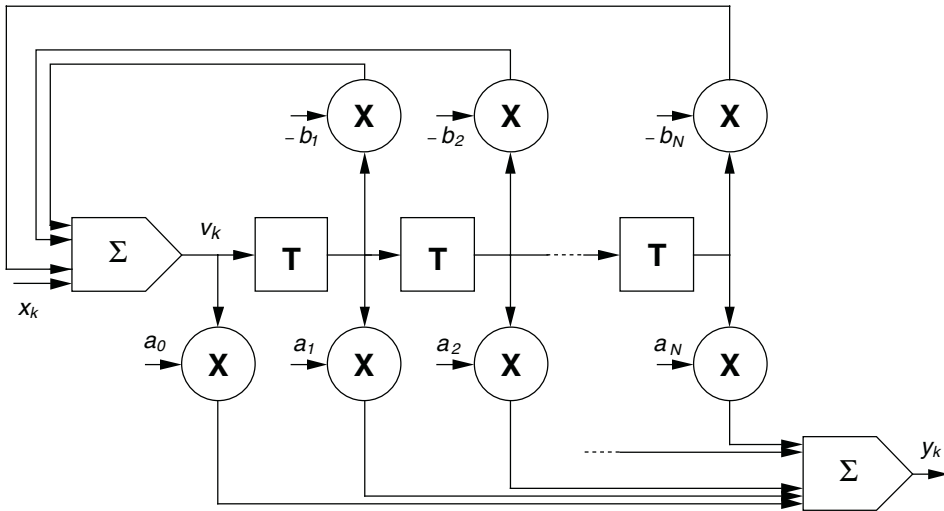


Figure 9.11. Structure canonique d'un filtre numérique récursif.

- premier ordre :

$$H_i(z) = \frac{\alpha_i}{1 - \beta_i \cdot z^{-1}}$$

- second ordre :

$$H_i(z) = \frac{\alpha_{i1} \cdot z^{-1} + \alpha_{i0}}{\beta_{i2} \cdot z^{-2} + \beta_{i1} \cdot z^{-1} + \beta_{i0}}$$

Ces deux éléments simples peuvent facilement se traduire en structure directe ou canonique. Pour une fonction de transfert quelconque, il suffit de l'exprimer en fonction de ces éléments de base pour réaliser ensuite une composition « produit » ou « somme » de ces éléments.

La fonction de transfert $H(z)$ peut s'écrire sous deux formes :

- produit de composants simples

$$H(z) = K_2 \cdot \prod_{i=1}^r H_i(z)$$

- somme de composants simples

$$H(z) = K_1 + \sum_{i=1}^r H_i(z)$$

Dans le cas d'une écriture sous la forme « produit », nous obtenons une structure série ou dite en cascade (figure 9.12, page suivante) et dans le cas d'une formulation « somme », nous obtenons une structure parallèle (figure 9.13, page suivante).

Comme nous l'avons vu dans le domaine analogique, cette adjonction de composants de base n'est réalisable, aussi directement, uniquement parce que nous sommes dans le domaine numérique où il n'y a pas de problème d'adaptation d'impédance.

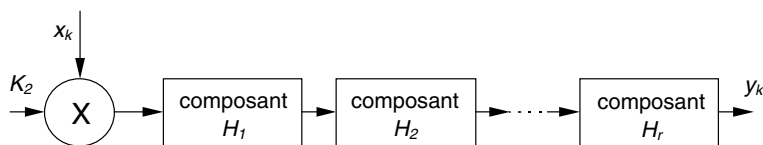


Figure 9.12. Structure série ou en cascade à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre.

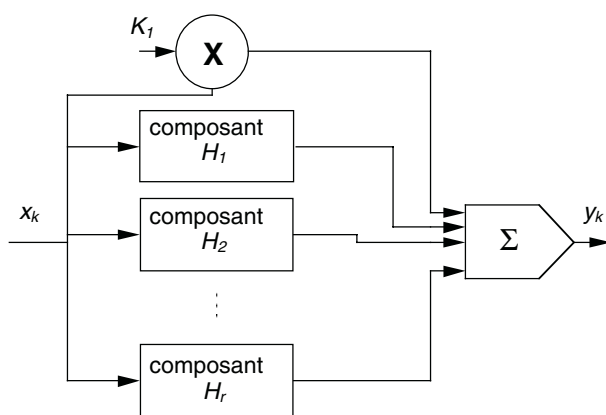


Figure 9.13. Structure parallèle à partir d'éléments de base du premier ou du second ordre.

9.4.2 Filtrage numérique basé sur la convolution

Pour réaliser ces filtres à convolution, les coefficients du filtre, qui sont représentés par les N valeurs de la réponse impulsionnelle discrétisée, sont des constantes dans l'algorithme de calcul ou stockés en mémoire (EPROM) dans le cas d'une réalisation matérielle du filtre. Dans ce dernier cas, deux structures peuvent être adoptées :

- structure directe (figure 9.14) ;
- structure transposée (figure 9.15, page ci-contre).

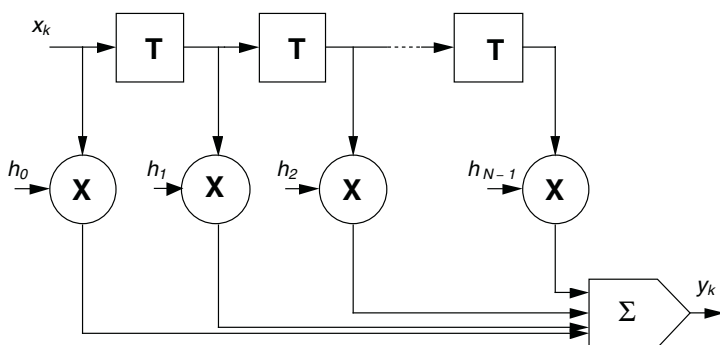


Figure 9.14. Structure directe d'un filtre à convolution.

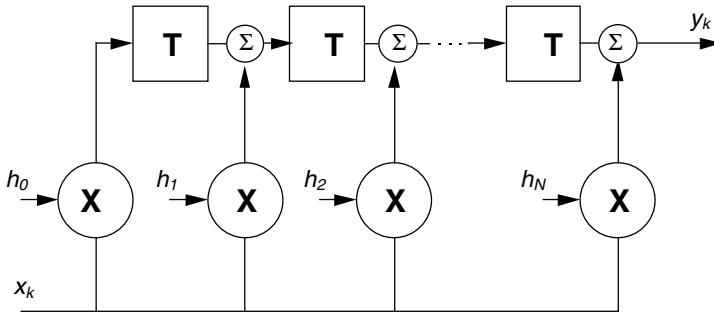


Figure 9.15. Structure transposée d'un filtre à convolution.

9.5 FILTRES NUMÉRIQUES AVANCÉS

Le domaine du filtrage numérique est très vaste car il repose uniquement sur les capacités de calcul des systèmes informatiques. Lorsque les possibilités des filtres classiques, vus précédemment, ne sont pas suffisantes pour un problème donné. Il existe des extensions possibles du « filtrage numérique ».

9.5.1 Filtres numériques de la valeur médiane

Les filtres numériques classiques linéaires ont pour fonction de base d'éliminer certaines composantes fréquentielles qui gênent l'interprétation du signal informatif. Pour cela il est nécessaire que les fréquences à éliminer se situent dans une zone de fréquences hors de la zone occupée par le signal utile. Pour répondre à cette limitation, il est possible de mettre en place des traitements non linéaires, appelés abusivement « filtres » numériques non linéaires.

Un de ces traitements non linéaires est le *filtre de la valeur médiane*. Étant donné $2N + 1$ échantillons x_k , la valeur médiane $x_{\text{med},k}$ de cet ensemble est l'échantillon qui se trouve au milieu de l'ensemble ordonné selon un ordre croissant :

$$\{x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-2N}\} \xrightarrow{\text{ordre croissant}} \{x'_k, x'_{k-1}, \dots, x'_{k-2N}; \text{ avec } x'_i \leq x'_{i+1}\}$$

d'où

$$x_{\text{med},k} = x'_{k-N}$$

Ce type de filtre numérique non linéaire permet de conserver les transitions rapides mais maintenues d'un signal et d'éliminer complètement des transitions de type impulsion courte. Si nous reprenons les exemples du paragraphe 9.1.3 « lissage temporel », ils mettent parfaitement en évidence cette caractéristique du filtre de la valeur médiane : le signal créneau est conservé sans modification et l'impulsion de durée unité est éliminée (figure 9.16, page suivante). Le traitement du signal du deuxième exemple montre aussi que ce filtre modifie moins fortement le signal informatif en conservant en particulier certaines transitions rapides (figure 9.17, page suivante).

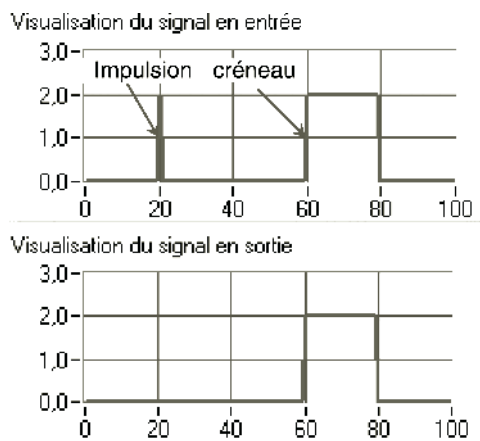


Figure 9.16. Effet d'un filtre numérique non linéaire de la valeur médiane avec un rang de 10 sur un signal impulsion de durée unité suivi d'un créneau.

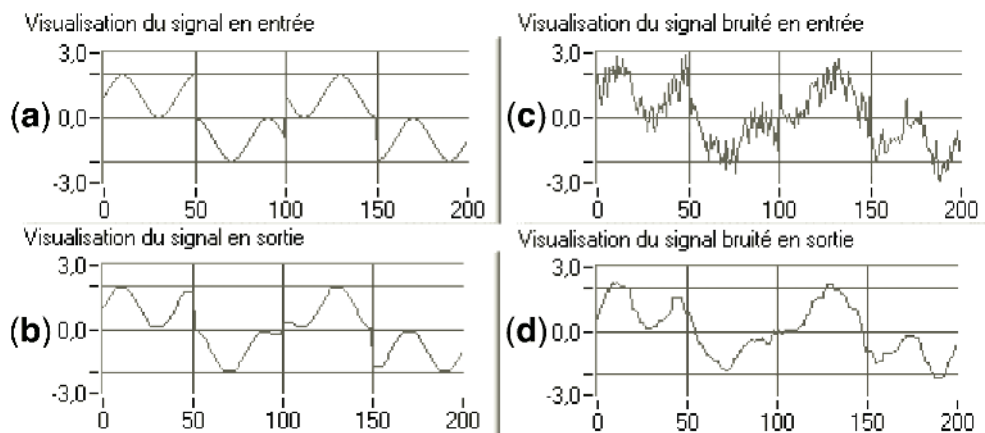


Figure 9.17. Effet d'un traitement par filtre de valeur médiane : signal initial (a), signal lissé avec un rang 5 (b), signal bruité initial (c) et signal bruité et lissé avec un rang 5 (d).

De façon plus générale, le calcul de la valeur médiane s'effectuant sur $2N + 1$ échantillons, cette technique permettra de sauvegarder toutes transitions rapides suivies par un plateau dont la durée est supérieure ou égale à $N \cdot T_e$ (T_e : période des échantillons). Dans le cas contraire cette transition sera éliminée.

9.5.2 Filtres numériques multicadence

Les systèmes étudiés jusqu'à présent ne mettaient en œuvre qu'une seule fréquence ou cadence d'échantillonnage $1/T_e$. Il est possible de trouver certaines applications où le signal d'entrée du filtre et le signal de sortie ne fonctionnent pas à la même cadence (système multicadence). Considérons deux exemples :

- filtrage passe-bas : le signal de sortie aura par définition même du traitement effectué une fréquence plus basse et donc pourra être échantillonné à une cadence plus faible ;
- modulation : le signal de sortie qui sera l'onde porteuse du signal informatif va avoir une fréquence plus élevée que le signal informatif d'entrée (chapitre 5).

Dans les deux cas, on cherchera à adapter le filtre à la cadence la plus petite afin de minimiser les temps de calcul. Dans le cas où il sera réalisé une réduction de la fréquence d'échantillonnage, l'opération est appelée « *décimation* » et dans le cas où une augmentation de la fréquence d'échantillonnage sera réalisée, l'opération est appelée « *interpolation* ».

Les opérations de décimation (enlever un échantillon sur n échantillons) ou d'interpolation (rajouter n échantillons entre 2 échantillons) vont conduire à des déformations spectrales. Nous avons vu en particulier le cas de l'interpolation dans l'exemple de reproduction des signaux sonores des lecteurs de CD-audio traité dans le paragraphe 7.4.2.

Considérons l'exemple inverse de la décimation. Soit un signal $x_k(t)$ échantillonné à la fréquence T_{e1} et le signal de sortie $y_k(t)$ dont nous voulons diminuer la fréquence d'échantillonnage jusqu'à T_{e2} (avec $T_{e2} = T_{e1}/4$). Cette opération ne sera possible que si le spectre du signal initial est limité *a priori* ou par une opération de filtrage à la fréquence $1/2T_{e2}$, i.e. à la fréquence $1/8T_{e1}$. En effet la décimation est équivalente à une opération d'échantillonnage et, si le spectre du signal à échantillonner à cette nouvelle cadence T_{e2} n'a pas son spectre limité à la fréquence $1/2T_{e2}$, le phénomène de repliement va se produire.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 9.1 (Synthèse d'un filtre numérique passe-bas du 1^{er} ordre)

Soit la constante de temps du filtre ($RC = \tau$), la représentation en transformée de Laplace de la fonction de transfert $H(p)$ d'un filtre passe-bas du premier ordre est

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p}$$

La réponse impulsionnelle du filtre est la suivante :

$$h(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot u(t)$$

et la réponse indicielle d'un filtre passe-bas du premier ordre :

$$s_{\text{ind}}(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right] \cdot u(t)$$

Dans le cas où nous avons l'application numérique suivante : $\tau = 1$ ms ($R = 1$ k Ω , $C = 1$ μ F), et $T_e = 100$ μ s, calculer le filtre numérique avec la transformation par équivalence à l'intégration. Tracer la réponse impulsionnelle et indicielle. Comparer à la réponse théorique. Conclure. Calculer le filtre numérique avec la transformation par équivalence à la dérivation. Tracer la réponse impulsionnelle et indicielle. Comparer à la réponse théorique. Conclure.

Solution

► Transformation par équivalence de la dérivation

Considérons le filtre numérique passe-bas obtenu par équivalence de la dérivation. Étant donné une période d'échantillonnage de T_e , nous avons la relation de transformation 9.14 à appliquer. Nous obtenons ainsi $H(z)$:

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{T_e}\right) - \frac{\tau}{T_e} \cdot z^{-1}}$$

Le calcul de l'équation aux différences est alors immédiat, soit le résultat suivant :

$$y_k = \frac{\frac{\tau}{T_e}}{1 + \frac{\tau}{T_e}} \cdot y_{k-1} + \frac{1}{1 + \frac{\tau}{T_e}} \cdot x_k$$

Avec l'application numérique suivante : $\tau = 1$ ms ($R = 1$ k Ω , $C = 1$ μ F), et $T_e = 100$ μ s, l'équation aux différences à résoudre est :

$$y_k = 0,9090909 \cdot y_{k-1} + 0,090909 \cdot x_k$$

Il est primordial de déterminer d'une part les échantillons x_k entrées du filtre :

- réponse impulsionnelle : $x_1 = 1$, $x_k = 0$ pour tout $k > 1$;
- réponse indicielle : $x_k = 1$ pour tout $k \geq 1$.

et d'autre part les conditions initiales, c'est-à-dire y_0 , soit : $y_0 = 1$ (valeur estimée ou connue de la solution).

► Transformation par équivalence à l'intégration

Considérons maintenant le même filtre numérique passe-bas obtenu par la méthode de l'équivalence à l'intégration. Nous avons la relation de transformation 9.15 à appliquer et nous obtenons ainsi $H(z)$:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 + \frac{2\tau}{T_e}\right) + \left(1 - \frac{2\tau}{T_e}\right) \cdot z^{-1}}$$

Le calcul de l'équation aux différences est alors immédiat, soit le résultat suivant :

$$y_k = \frac{1}{1 + \frac{2\tau}{T_e}} \cdot \left[\left(\frac{2\tau}{T_e} - 1 \right) \cdot y_{k-1} + x_k + x_{k-1} \right]$$

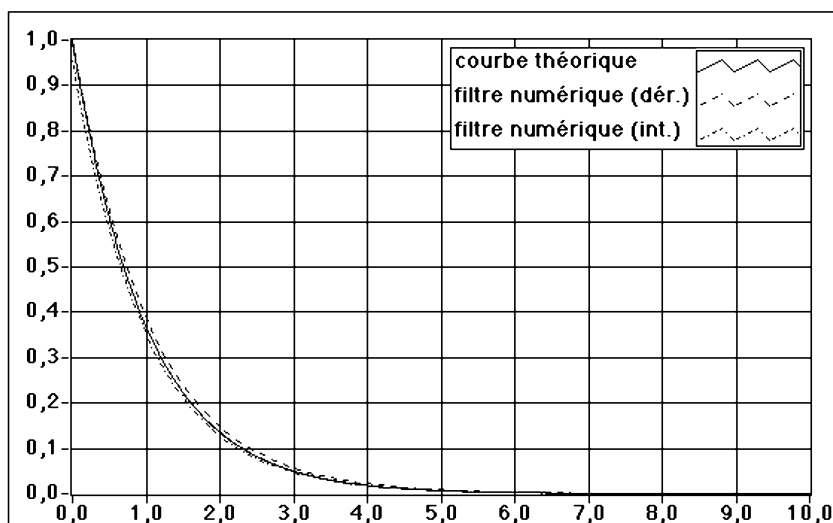


Figure 9.18. Réponses impulsionnelles de deux filtres numériques passe-bas du premier ordre : filtre numérique synthétisé par équivalence de la dérivation et par équivalence de l'intégration. Comparaison avec la réponse théorique.

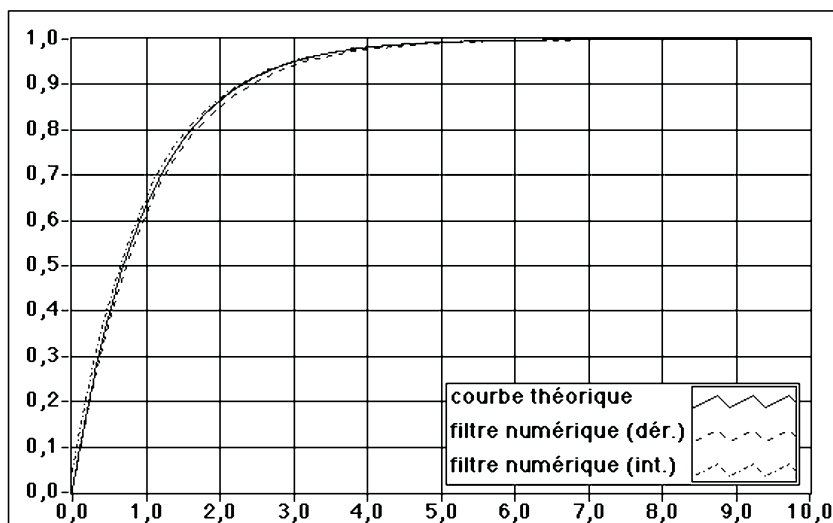


Figure 9.19. Réponses indicielles de deux filtres numériques passe-bas du premier ordre : filtre numérique synthétisé par équivalence de la dérivation et par équivalence de l'intégration. Comparaison avec la réponse théorique.

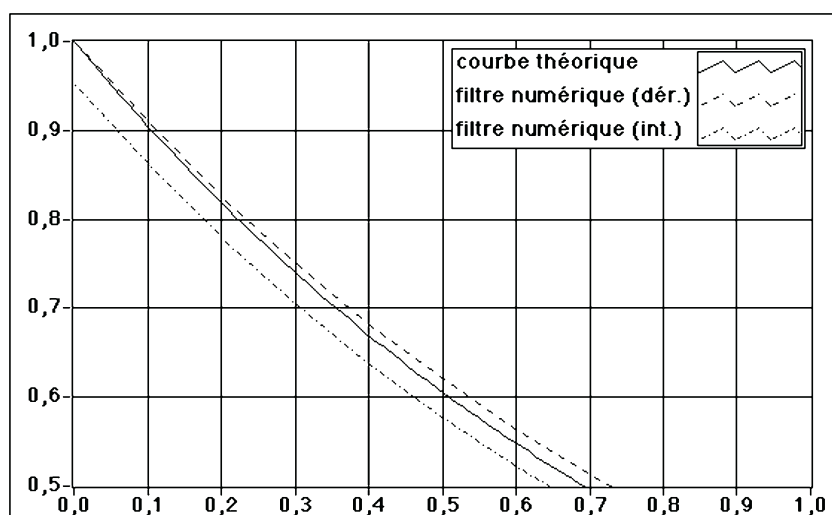


Figure 9.20. Visualisation des erreurs dues aux conditions initiales pour les réponses impulsionnelles des deux filtres numériques passe-bas du premier ordre (figure 9.18, page précédente).

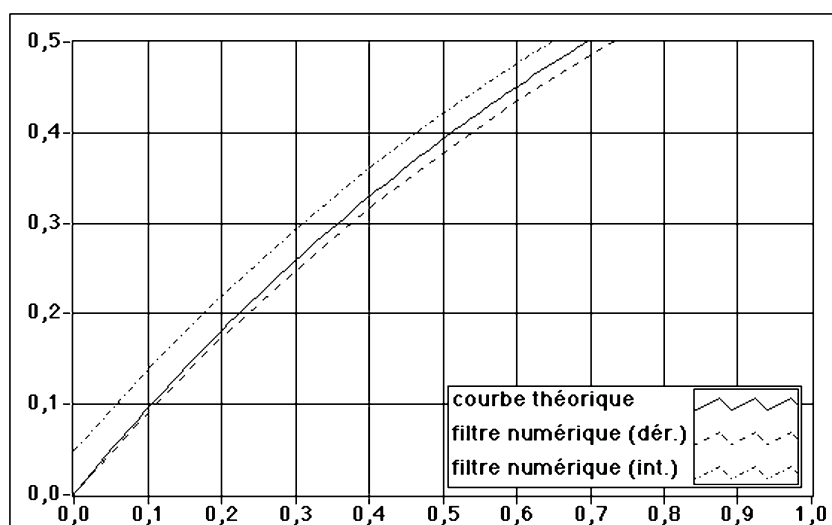


Figure 9.21. Visualisation des erreurs dues aux conditions initiales pour les réponses indicielles des deux filtres numériques passe-bas du premier ordre (figure 9.19, page précédente).

Avec l'application numérique suivante : $\tau = 1 \text{ ms}$ ($R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$), et $T_e = 100 \text{ }\mu\text{s}$, l'équation aux différences à résoudre est :

$$y_k = 0,904761 \cdot y_{k-1} + 0,047619 \cdot (x_k + x_{k-1})$$

Il est primordial de déterminer d'une part les échantillons x_k entrées du filtre :

- réponse impulsionnelle : $x_1 = 1$, $x_k = 0$ pour tout $k > 1$;
- réponse indicielle : $x_k = 1$ pour tout $k \geq 1$.

et d'autre part les conditions initiales, c'est-à-dire :

- $x_0 = 0$ (signal causal) ;
- $y_0 = 1$ (valeur estimée ou connue de la solution).

► Comparaison des deux synthèses de filtres numériques

Les figures 9.18 et 9.19, page 225, représentent les résultats obtenus pour les deux filtres numériques en comparaison des réponses théoriques pour respectivement la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle.

D'une façon générale, ces résultats montrent que les deux filtres numériques ont une réponse quasiment identique à celle du filtre analogique. D'une façon plus détaillée, nous pouvons remarquer que la synthèse du filtre numérique avec l'équivalence à la dérivation a un comportement initial meilleur ; mais ensuite converge moins vite vers la réponse du filtre analogique théorique (figures 9.20 et 9.21, page ci-contre).

Remarque : il est nécessaire de réaliser un calcul numérique précis des coefficients de l'équation aux différences pour obtenir des résultats corrects au niveau de la synthèse par programme (paragraphe suivant).

Exercice 9.2 (Synthèse d'un filtre numérique passe-bas du 2^e ordre)

En considérant une fréquence propre F_0 ($\omega_0 = 2\pi F_0$) et un coefficient d'amortissement m , la représentation de la fonction de transfert $H(p)$ d'un filtre passe-bas du deuxième ordre est :

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot m \cdot p + p^2}$$

Dans le cas où nous avons les caractéristiques suivantes : $F_0 = 50 \text{ Hz}$ et $m = 0,1$, tracer la réponse théorique du filtre.

Calculer le filtre numérique avec la transformation par équivalence à la dérivation. Tracer la réponse impulsionnelle. Comparer à la réponse théorique. Conclure.

Calculer le filtre numérique avec la transformation par équivalence à l'intégration. Tracer la réponse impulsionnelle. Comparer à la réponse théorique. Conclure.

Solution

En considérant les valeurs numériques $F_0 = 50 \text{ Hz}$ et $m = 0,1$, la réponse impulsionnelle est une réponse oscillatoire amortie (figure 9.22, page suivante).

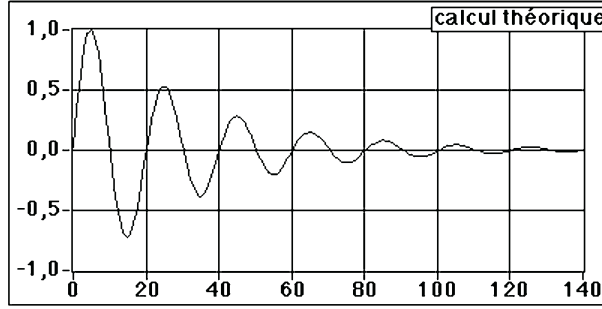


Figure 9.22. Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas du deuxième ordre avec un coefficient d'amortissement égal à 0,1.

► Transformation par équivalence de la dérivation

Considérons le filtre numérique passe-bas du deuxième ordre obtenu par équivalence de la dérivation. Étant donné une période d'échantillonnage de T_e , nous avons la relation de transformation 9.14 à appliquer. Nous obtenons ainsi la transmittance en z suivante :

$$H(z) = \frac{\omega_0^2 T_e^2}{(1 + 2\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2) - 2 \cdot (1 + \omega_0 m T_e) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$$

À partir de cette transmittance en z , le calcul de l'équation aux différences donne le résultat suivant :

$$y_k = b_1 \cdot y_{k-1} + b_2 \cdot y_{k-2} + a_0 \cdot x_k$$

avec les valeurs des coefficients :

$$b_1 = \frac{2 \cdot (1 + \omega_0 m T_e)}{1 + 2\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

$$b_2 = \frac{-1}{1 + 2\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

et

$$a_0 = \frac{\omega_0^2 T_e^2}{1 + 2\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

Avec l'application numérique suivante $T_e = 2$ ms ($F_e = 500$ Hz), $F_0 = 50$ Hz et $m = 0,1$; les coefficients de l'équation aux différences à résoudre sont :

$$b_1 = 1,39805, \quad b_2 = -0,65770 \quad \text{et} \quad a_0 = 0,25965$$

Les échantillons x_k d'entrées du filtre et les conditions initiales sont les suivantes :

- réponse impulsionnelle : $x_1 = 1, x_k = 0$ pour tout $k > 1$;
- $y_0 = y_{-1} = 1$ (valeur estimée ou connue de la solution).

La figure 9.23, page ci-contre représente le résultat obtenu en comparaison de la réponse théorique.

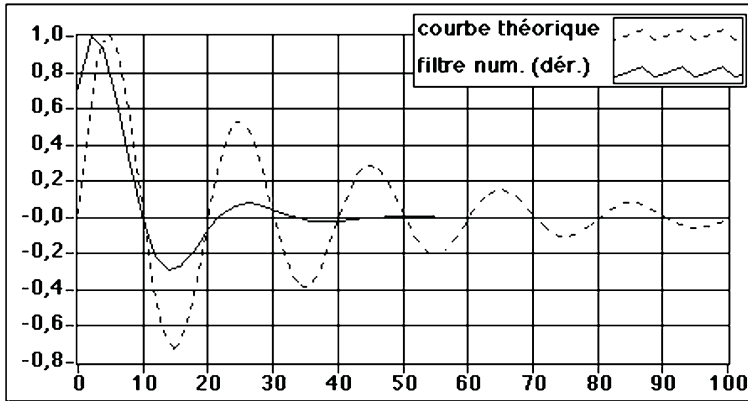


Figure 9.23. Réponse impulsionnelle d'un filtre numérique passe-bas du deuxième ordre avec un coefficient d'amortissement égal à 0,1 dans le cas de l'équivalence de la dérivation.

► Transformation par équivalence à l'intégration

Considérons le filtre numérique passe-bas du deuxième ordre obtenu par équivalence de l'intégration. Étant donné une période d'échantillonnage de T_e , nous avons la relation de transformation 9.15 à appliquer. Nous obtenons ainsi la transmittance en z suivante :

$$H(z) = \frac{\omega_0^2 \cdot T_e^2 \cdot (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{(4 + 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2) - 2 \cdot (4 - \omega_0^2 T_e^2) \cdot z^{-1} + (4 - 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2) \cdot z^{-2}}$$

À partir de cette transmittance en z , le calcul de l'équation aux différences donne le résultat suivant :

$$y_k = b_1 \cdot y_{k-1} + b_2 \cdot y_{k-2} + a_0 \cdot x_k + a_1 \cdot x_{k-1} + a_2 \cdot x_{k-2}$$

avec les valeurs des coefficients :

$$b_1 = \frac{2 \cdot (4 - \omega_0^2 T_e^2)}{4 + 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

$$b_2 = -\frac{4 - 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}{4 + 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

$$a_0 = a_2 = -\frac{\omega_0^2 T_e^2}{4 + 4\omega_0 m T_e + \omega_0^2 T_e^2}$$

et

$$a_1 = 2 \cdot a_0$$

Avec la même application numérique suivante $T_e = 2$ ms ($F_e = 500$ Hz), $F_0 = 50$ Hz et $m = 0,1$; les coefficients de l'équation aux différences à résoudre sont :

$$b_1 = 1,55193, \quad b_2 = -0,89181, \quad a_0 = a_2 = 0,084971 \quad \text{et} \quad a_1 = 0,169942$$

Les échantillons x_k d'entrées du filtre et les conditions initiales sont les suivantes :

- réponse impulsionnelle : $x_1 = 1$, $x_k = 0$ pour tout $k > 1$;
- $x_0 = x_{-1} = 0$ (signal causal) ;
- $y_0 = y_{-1} = 1$ (valeur estimée ou connue de la solution).

La figure 9.24 représente le résultat obtenu en comparaison de la réponse théorique.

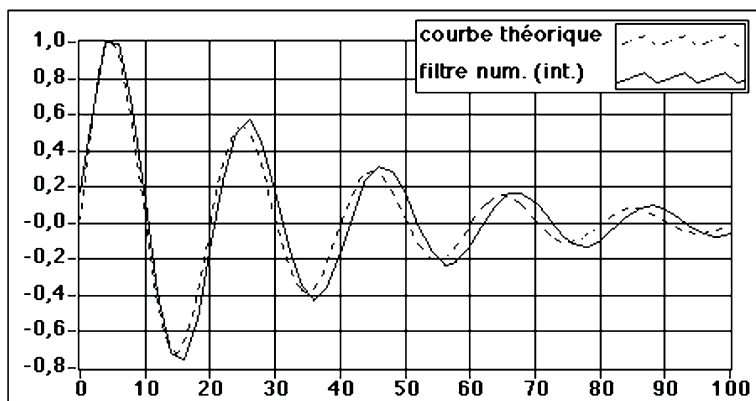


Figure 9.24. Réponse impulsionnelle d'un filtre numérique passe-bas du deuxième ordre avec un coefficient d'amortissement égal à 0,1 dans le cas de l'équivalence de l'intégration.

Les résultats obtenus pour ces deux synthèses d'un filtre passe-bas du deuxième ordre montrent clairement la plus grande efficacité de l'équivalence de l'intégration par rapport à l'équivalence de la dérivation.

Ce résultat s'explique par le fait que le filtre du deuxième ordre étant basé sur une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre comme son nom l'indique, il est relativement difficile de le synthétiser par une approximation du premier ordre (cas de l'équivalence à la dérivation).

Exercice 9.3 (Synthèse d'un filtre numérique à réponse impulsionnelle finie)

Prenons l'exemple d'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure F_c , correspondant à une constante de temps τ ($= 1/(2\pi F_c)$). La réponse impulsionnelle, calculée dans le paragraphe 4.4.1, s'exprime à partir des échantillons suivants :

$$h'_k = \frac{T_e}{\tau} \cdot e^{-\frac{kT_e}{\tau}}$$

La réponse impulsionnelle est causale, mais pas finie. Aussi nous considérerons uniquement un intervalle pour lequel la fonction précédente est supérieure ou égale à 5 % de la valeur maximale. Prenons l'exemple numérique suivant : $\tau = 0,5$ ms ($F_c = 320$ kHz), $T_e = 0,1$ ms.

Le nombre d'échantillons de la réponse impulsionnelle est alors limité à 20, correspondant au temps 2 ms. Ainsi nous avons :

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h'_k	0,2	0,164	0,134	0,11	0,09	0,074	0,06	0,049	0,04	0,033

N	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
h'_k	0,027	0,022	0,018	0,015	0,012	0,01	0,008	0,007	0,005	0,004

Calculer le résultat d'une sollicitation de type impulsion de durée $2T_e$. Comparer la réponse obtenue à la réponse théorique.

Solution

En considérant une sollicitation de type impulsion de durée $2T_e$, le résultat, obtenu par la relation 9.16 et représenté sur la figure 9.25, montre la bonne qualité de ce filtre numérique pour synthétiser ce filtre passe-bas très simple. Le décalage en amplitude entre la courbe de réponse théorique et la courbe calculée avec le filtre numérique est dû au premier pas de calcul et à la valeur initiale de la réponse impulsionnelle discrétisée ($= T_e/\tau$). Un pas d'échantillonnage T_e plus petit par rapport à la constante de temps τ diminuerait fortement ce décalage.

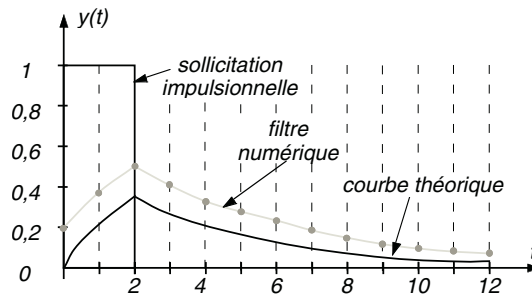


Figure 9.25. Réponses d'un filtre numérique passe-bas du premier ordre synthétisé par l'équation de convolution.

PARTIE 3

LES BASES DE L'ACQUISITION DE DONNÉES

Chapitre 10

Les chaînes d'acquisition de données

10.1 GÉNÉRALITÉS

10.1.1 Introduction

Après avoir étudié les principales techniques de traitement du signal qu'il était possible de mettre en œuvre, nous allons nous intéresser à la réalisation complète d'une application d'acquisition, de traitement et de restitution de données. Les micro-ordinateurs sont actuellement des plates-formes privilégiées pour ce type d'applications. Ils offrent en effet une très grande variété d'outils logiciels pour le développement des programmes d'acquisition et de traitement des données. Ces outils disposent en général de générateur d'interface utilisateur graphique et interactive (annexe H). De plus l'ouverture de ces logiciels vers d'autres applications telles que la gestion des bases de données ou la communication est également un point fort.

Le point le plus délicat dans la réalisation de telles applications est le choix de la solution matérielle et sa mise en œuvre (figure 10.1, page suivante). Le matériel le plus répandu consiste en une carte d'entrées/sorties numériques et/ou analogiques qui vient s'insérer dans le bus d'extension du micro-ordinateur. La sélection de cette carte, point déterminant de l'application, fait apparaître de nombreux critères (nombre de voies d'entrées/sorties, fréquence maximale d'acquisition, précision, etc.) dont la détermination n'est pas toujours aisée et est souvent l'objet de compromis. D'autres solutions sont aussi possibles suivant les cas : interconnexion avec un ou plusieurs appareils de mesures par une liaison de type série ou parallèle, liaison avec un châssis déporté d'acquisition de données, etc.

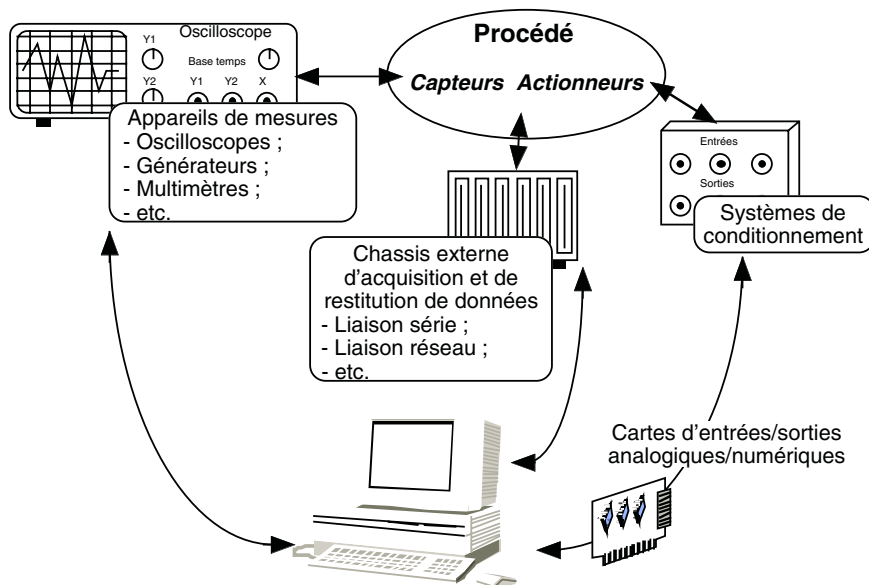


Figure 10.1. Les différentes configurations possibles d'une chaîne d'acquisition et de restitution de données.

La réponse à toutes ces questions passe d'une part par la connaissance des principaux composants fonctionnels constituant ces chaînes d'acquisitions de données et d'autre part par le suivi d'une démarche stricte et complète de détermination des différents éléments.

En résumé, la réalisation technique se compose donc des quatre éléments suivants :

- les capteurs et les actionneurs pour transformer les grandeurs ou phénomènes physiques à mesurer et à contrôler en signaux électriques : thermocouple (température), vanne (débit), etc. ;
- le câblage et le conditionnement des signaux ;
- le matériel d'acquisition et de restitution de données ;
- les techniques de traitement des données (logiciel et/ou matériel).

Le premier élément (capteurs et actionneurs) concerne le domaine de la physique. Ce point, qui est succinctement décrit dans la suite de ce chapitre, est généralement bien maîtrisé par le concepteur. Le dernier point (traitement des signaux) ayant été traité dans les précédents chapitres, nous allons décrire essentiellement les deux autres points de façon plus détaillée et, en particulier, les composants entrant dans la réalisation des cartes d'acquisition et de restitution de données.

En résumé, de façon plus globale, la mise en place d'une application d'acquisition de données doit obligatoirement suivre plusieurs étapes :

- Identification et caractérisation des signaux d'entrées/sorties.
- Sélection du matériel d'acquisition et de restitution de données, avec une partie conditionnement de signaux si nécessaire.
- Réalisation du logiciel de l'application.

10.1.2 Les types de signaux d'entrées/sorties

La méthode de traitement numérique pour le contrôle de processus nécessite de présenter les informations à l'ordinateur sous forme numérique et en retour, à la sortie de celui-ci, on dispose de l'information sous cette même forme numérique. Les capteurs et les actionneurs utilisés peuvent toutefois donner ou accepter l'image électrique d'une grandeur physique sous deux formes : *la forme numérique et la forme analogique*. Dans le premier cas, le signal électrique ne peut prendre que deux états électriques (signal dit tout ou rien) dont chacun a une signification particulière (figure 10.2). Les interfaces entre ces capteurs ou actionneurs et le calculateur sont généralement simples puisque le codage de l'information est déjà réalisé sous une forme numérique (binaire). Dans le deuxième cas, le signal électrique est continûment variable et représente la valeur réelle du phénomène physique avec un retard plus ou moins grand. La sortie du capteur ou l'entrée de l'actionneur sont une fonction de la grandeur physique, loi de variation en général non linéaire et étroitement liée au transducteur ou au récepteur (figure 10.3).

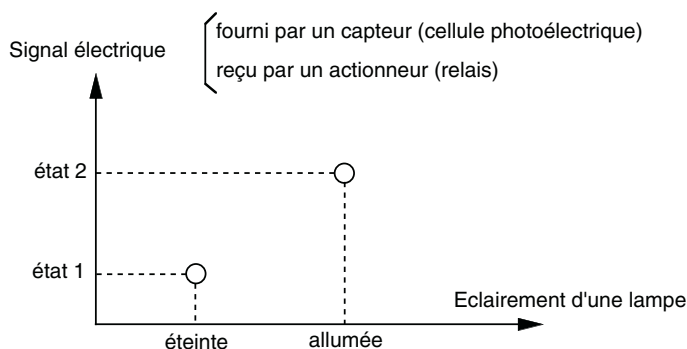


Figure 10.2. Exemple de signal électrique tout ou rien fourni par un capteur ou reçu par un actionneur pour le contrôle de l'éclairement d'une lampe.

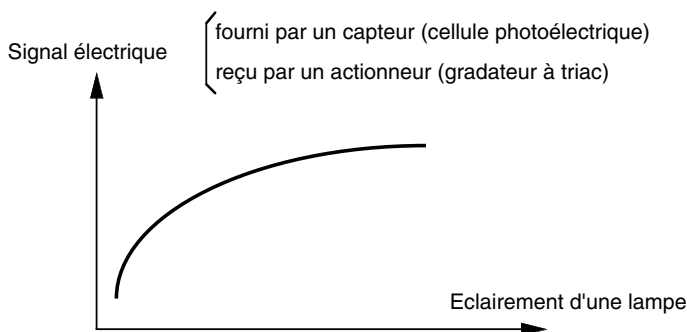


Figure 10.3. Exemple de signal électrique analogique fourni par un capteur ou reçu par un actionneur pour le contrôle de l'éclairement d'une lampe. Rem. : un capteur (cellule photoélectrique) peut être utilisé dans les deux cas suivant son état de fonctionnement, tout ou rien (bloqué/saturé) ou régime linéaire.

Les interfaces associées à ce type de signaux électriques vont nécessiter en particulier une conversion analogique-numérique pour un capteur et numérique-analogique pour un actionneur, correspondant à une quantification du signal électrique (opération conduisant à remplacer la valeur exacte du signal analogique par une valeur approchée choisie parmi un nombre limité de valeurs).

Le matériel-interface entre le processus industriel et le micro-ordinateur sera donc composé d'une façon générale de tout ou partie des organes suivants (figure 10.4) :

- Organes d'entrées :
 - interfaces d'entrées numériques pour les capteurs fournissant des signaux tout ou rien ;
 - interfaces d'entrées analogiques avec un convertisseur analogique/ numérique (CAN) pour les capteurs fournissant des signaux électriques continûment variables.
- Organes de sorties :
 - interfaces de sorties numériques pour les actionneurs fonctionnant avec des signaux tout ou rien ;
 - interfaces de sorties analogiques avec convertisseur numérique-analogique (CNA) pour les actionneurs acceptant des signaux électriques continûment variables.

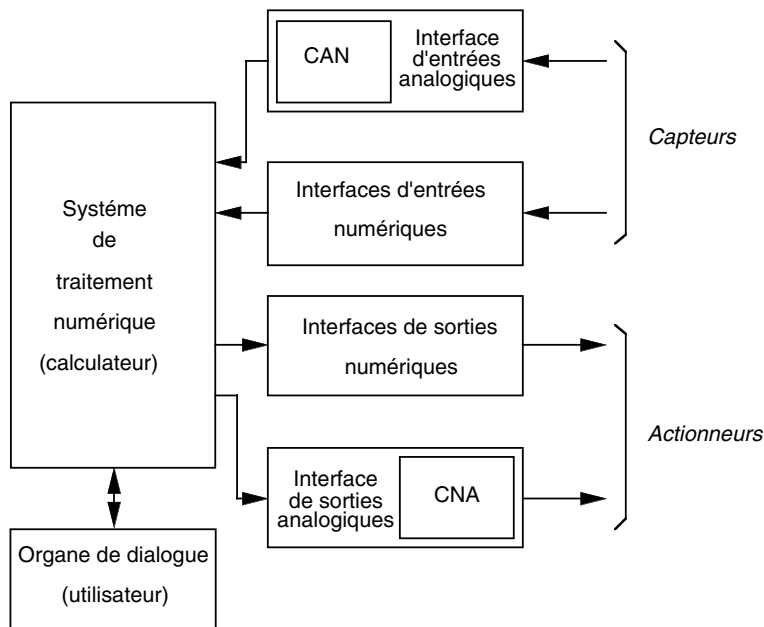


Figure 10.4. Constitution typique d'une interface industrielle.

10.1.3 Codage de l'information au niveau d'un calculateur

Les circuits électroniques, constituant les calculateurs, fonctionnent en logique T.T.L. (figure 10.5, page ci-contre), soit :

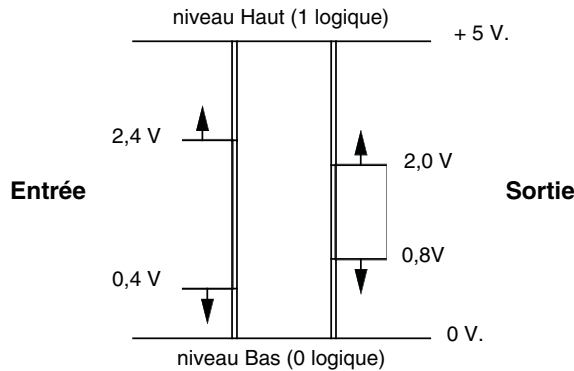


Figure 10.5. Spécifications électriques des signaux d'entrées et de sorties d'un ordinateur.

- état haut – état logique 1 – signal électrique +5 V (signal électrique compris entre 2,4 V et 5 V en entrée et entre 2 V et 5 V en sortie) ;
- état bas – état logique 0 – signal électrique 0 V (signal électrique compris entre 0 V et 0,4 V en entrée et entre 0 V et 0,8 V en sortie).

Par conséquent, les interfaces d'entrées/sorties numériques doivent adapter les signaux extérieurs du type tout ou rien à ces niveaux de tension acceptable pour les circuits électroniques des calculateurs. Ces informations, de type tout ou rien, sont codées sur un état logique : un *bit*.

Pour les signaux électriques analogiques, il est nécessaire de réaliser un codage binaire de la valeur. Les calculateurs travaillant sur des signaux logiques en parallèle (8 signaux ou 8 bits-*octet*, 16 signaux ou 16 bits-*mot* ou encore 32 bits), le codage réalisera une correspondance entre l'amplitude d'une tension électrique et un nombre binaire, c'est le rôle des convertisseurs *CAN* ou l'inverse avec les convertisseurs *CNA*.

Il existe trois principaux types de codage correspondant à des composants spécifiques qui peuvent modifier le traitement des données dans la suite.

a) Codage binaire simple (code naturel)

Un nombre décimal N codé en binaire sur k chiffres (a_0 à a_{k-1}) s'écrit sous la forme suivante :

$$N = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \dots + a_{k-1} \cdot 2^{k-1}$$

Pour un codage sur 8 bits, le nombre décimal N est compris entre 0 et 255, d'où le codage possible présenté dans le tableau 10.1, page suivante. Ce codage binaire simple ne permet que de représenter des nombres positifs. Pour coder des nombres positifs ou négatifs, on utilise le codage binaire complément à 2.

b) Codage complément à 2 (complément vrai)

Le nombre binaire négatif s'obtient à partir du nombre binaire positif, codé en binaire simple, en inversant les bits 0 $\leftrightarrow$ 1 (complément restreint ou complément à 1) et en augmentant le résultat de 1. Le premier chiffre du nombre binaire caractérise le signe

TABLEAU 10.1. Exemple des différents codes dans un codage binaire simple (code naturel).

Signal électrique analogique	↔	Code binaire
0 mV	CAN →	0000 0000
...		...
53 mV	← CNA	0011 0101
...		...
255 mV		1111 1111

du nombre : 0 pour positif et 1 pour négatif. Ce codage a l'avantage d'être simple pour le traitement des opérations arithmétiques puisqu'il ne nécessite pas de traitement particulier pour le bit de signe. En effet, la somme d'un nombre et de son complément à 2 donne bien un résultat nul. Pour un codage sur 8 bits, la correspondance est donnée dans le tableau 10.2.

TABLEAU 10.2. Exemple des différents codes dans un codage complément à 2 (complément vrai).

Signal électrique analogique	↔	Code binaire
−128 mV	CAN →	1000 0000
−127 mV		1000 0001
...		...
−1 mV		1111 1111
0 mV	← CNA	0000 0000
1 mV		0000 0001
...		...
127 mV		0111 1111

c) Codage binaire codé décimal (BCD)

Le nombre décimal est codé en considérant chaque chiffre du nombre et en donnant sa représentation sur 4 bits (0 à 9). Ce codage conduit à des nombres binaires plus longs puisque toutes les combinaisons binaires ne sont pas utilisées (tableau 10.3). Ce codage est très utile lors de la sortie des informations sur des afficheurs, l'information étant disponible directement sous forme décimale.

TABLEAU 10.3. Exemple des différents codes dans un codage binaire codé décimal (BCD).

Signal électrique analogique	↔	Code binaire
0 mV	CAN →	0000 0000
...		...
9 mV		0000 1001
10 mV	← CNA	0001 0000
...		...
99 mV		1001 1001

10.2 CAPTEURS ET ACTIONNEURS

10.2.1 Introduction

Les capteurs et les actionneurs, qui se situent en début et en fin de la chaîne de contrôle industrielle, sont primordiaux en ce sens que, si le choix n'est pas adapté, le reste du traitement ne pourra pas retrouver ou réinventer la bonne mesure ou la bonne commande. Par rapport au procédé, on désire prélever une information représentée par une ou plusieurs grandeurs physiques (pression, luminosité, température...). Cette information est donc transformée en signal électrique par le capteur. C'est à partir de ce signal électrique mesuré et éventuellement traité qu'une décision de commande peut être prise et envoyée vers le procédé au travers de l'actionneur qui va modifier une grandeur physique. Les possibilités de captation ou d'activation de paramètres physiques sont limitées bien que les capteurs et actionneurs soient de plus en plus performants.

Vis-à-vis du procédé, une très grande différence entre les capteurs et les actionneurs réside dans le fait que les capteurs doivent être le moins perturbants ou intrusifs possible, alors que les actionneurs, de par leur fonction, sont obligatoirement actifs sur l'évolution du procédé. Ainsi on pourrait définir un capteur idéal comme étant celui qui prélève l'information pertinente (utile) au niveau du procédé sans en modifier ou perturber son fonctionnement.

10.2.2 Les caractéristiques des capteurs

À ce niveau, l'importance du capteur est bien mise en évidence. En effet le signal électrique de sortie doit être effectivement le support de l'information puisque la décision de commande ou simplement l'interprétation de la mesure est faite à partir du signal et non de l'information elle-même. Les capteurs, qui sont les « sens » du système d'acquisition, de traitement et de restitution de données, doivent être choisis avec beaucoup de précision.

Ainsi les capteurs, composants essentiels de la chaîne de mesures, vont s'écarter du capteur idéal à cause des différentes caractéristiques qui peuvent être classées en trois groupes :

- caractéristiques fondamentales : bande passante, résolution ;
- caractéristiques intrinsèques ;
- caractéristiques liées à l'environnement.

a) Caractéristiques fondamentales

L'information, contenue dans la mesure que l'on va réaliser, peut être caractérisée d'une part par sa *bande passante*, c'est-à-dire la totalité des fréquences utiles. Le capteur doit donc être capable de donner une image électrique correcte des variations dans cette plage fréquentielle d'observation. Prenons l'exemple d'une caméra utilisée pour enregistrer l'évolution d'un phénomène (un front de flammes par exemple). Il est impératif que le capteur caméra réponde aux deux critères de bandes passantes : sensibilité aux longueurs d'onde du phénomène lumineux observé et vitesse de prise

de vue suffisante par rapport aux changements à observer (évolution du phénomène physique).

D'autre part la *résolution* du capteur doit être adaptée aux phénomènes. Cette résolution ou la capacité de différencier deux valeurs de la grandeur physique peut être spatiale, temporelle ou fréquentielle. En reprenant l'exemple précédent, il est clair que la résolution spatiale de la caméra sera directement liée à la possibilité d'analyser des phénomènes de dimension réduite (turbulence...).

b) Caractéristiques intrinsèques

Le phénomène physique, sur lequel s'appuie le capteur, et sa réalisation concrète conduisent à des caractéristiques techniques inhérentes à tous éléments mécaniques et/ou électriques :

- *sensibilité* du capteur : évolution de la tension de sortie fournie par le capteur par rapport à l'amplitude de la variation de la grandeur physique mesurée. Cette caractéristique sera exprimée par exemple en degré par volt ($^{\circ}\text{C}/\text{V}$), etc. ;
- *étendue de mesures* ou plage de mesures accessible au capteur ;
- caractéristiques de la *courbe de transfert* « signal électrique-grandeur physique » : linéarité, décalage, etc. ;
- précision de lecture dans le cas d'un message visuel délivré par le capteur (cadran) ;
- réversibilité ou phénomène d'*hystérésis* (par exemple dans le cas des capteurs magnétiques) : le signal de sortie du capteur dépend des mesures précédentes ;
- *décalage du zéro* électrique du capteur (erreur d'offset ou de zéro) d'un point de vue statique (à la mise en fonctionnement) ou dynamique (dérive au cours du temps) ;
- *domaine de non-détérioration* du capteur : pas de modifications des caractéristiques techniques du capteur ;
- *domaine de non-destruction* du capteur : le capteur n'est pas détruit, mais les caractéristiques techniques du capteur peuvent être modifiées. En conséquence, il est nécessaire de procéder à un ré-étalonnage avant une nouvelle utilisation ;
- *reproductibilité* des capteurs : une suite de mesures, réalisées dans les mêmes conditions, donnera les mêmes résultats ;
- *interchangeabilité* des capteurs : le remplacement par un capteur identique ne modifie pas les performances de la chaîne de mesures. Cette dernière propriété est d'une grande importance pour le domaine de la maintenance des matériels.

c) Caractéristiques liées à l'environnement

Nous pouvons distinguer deux relations du capteur avec son environnement :

- l'influence du milieu dans lequel est mis le capteur sur ses caractéristiques intrinsèques. Par exemple la courbe de transfert du capteur peut être modifiée selon la température à laquelle le capteur est porté ;
- la pertinence ou la véracité de la mesure par rapport à la grandeur physique étant donné la perturbation que le capteur induit sur le système observé.

Cette dernière caractéristique rejoint la notion de capteur intrusif vu dans le paragraphe précédent. La mesure faite par un capteur correspond-elle à la grandeur physique existante avant la mise en place du capteur ? Par exemple une sonde de température de type thermocouple (paragraphe suivant) va modifier localement le champ de températures et par conséquent la température mesurée n'est pas celle qui existe en l'absence du capteur. La grande qualité d'une chaîne de mesures est liée au fait de pouvoir minimiser cette influence du capteur sur le phénomène physique à observer ou au moins pouvoir caractériser cette déviation. Cette étude doit être impérativement réalisée par le concepteur avant la mise en place complète de la chaîne de mesures. L'analyse de l'influence du capteur sur le procédé observé est du domaine du physicien.

10.2.3 Les principaux types de capteurs

De façon simple un capteur peut être défini comme un transducteur convertissant une grandeur physique en un signal électrique. La transformation de cette grandeur physique en variable électrique peut être directe dans quelques cas simples : la différence de potentiel entre deux métaux est directement fonction de la température, c'est l'effet thermoélectrique utilisé pour les thermocouples (paragraphe suivant). Mais en réalité la technologie des capteurs fait souvent appel à plusieurs conversions de phénomène physique avant d'arriver au signal électrique de sortie. Par exemple la mesure d'un signal sonore à l'aide d'un microphone va s'effectuer selon les différentes phases : son, variation de pression d'un fluide (air), déplacement d'une membrane, variation de capacité, signal électrique.

Le classement des capteurs peut se faire selon la grandeur à mesurer : longueur, épaisseur, force, poids, pression, déplacement, allongement, position, niveau, vitesse, température, conductivité, humidité, accélération, vibration, débit de fluides, temps, etc. À chacune de ces grandeurs à mesurer peuvent correspondre un ou plusieurs types de capteurs fonctionnant selon un phénomène spécifique : variation de résistance, variation d'induction magnétique, variation capacitive, variation de fréquence, variation de quantité d'électricité, variation de flux lumineux, variation de caractéristiques du composant, etc.

Nous limiterons notre étude aux grandeurs physiques les plus courantes avec un classement des différents capteurs selon la grandeur physique à mesurer. Le tableau 10.4, page suivante, présente ainsi des exemples de capteurs classés selon la grandeur mesurée.

Cette liste n'est pas exhaustive au niveau de l'ensemble des capteurs disponibles ; mais elle est représentative des capteurs mis en œuvre dans beaucoup de chaînes de mesures. Cependant, il est important de noter que de plus en plus de mesures font appel aux techniques optiques et d'imagerie qui sont plus précises, plus riches d'information et surtout moins intrusives au niveau des phénomènes observés. Aussi la grandeur physique initialement à mesurer sera transformée en une autre grandeur physique mesurable par un moyen optique (acquisition d'images). Par exemple l'écoulement d'un fluide sera remplacé par le déplacement de fines particules injectées dans ce fluide. Et ainsi le film des trajectoires de ces particules

TABEAU 10.4. Classement des différents capteurs selon la grandeur physique à mesurer.

Phénomène physique	Capteurs
Température	– thermocouples; – détecteurs résistifs; – thermistances; – thermomètres à quartz; – pyromètres à infrarouge, etc.
Position et déplacement	– potentiomètres; – capteurs inductifs; – capteurs capacitifs; – capteurs optiques incrémentaux; – télémètres, etc.
Pression et force, son	– jauges de contrainte (capteurs extensométriques); – potentiomètres; – capteurs piézo-électriques; – microphones, etc.
Lumière	– cellules photoélectriques; – photo-éléments; – surfaces photosensibles; – caméra CCD, etc.
Niveau de fluides, débit de fluides	– capteurs à flotteurs; – conductimètres; – débitmètres mécaniques; – débitmètres à ultrasons, etc.

permettra non seulement de remonter à la grandeur « vitesse d'écoulement », mais aussi de mettre en évidence des perturbations locales éventuelles de cet écoulement (zones de turbulence).

Parmi l'ensemble des capteurs cités dans le tableau ci-avant, nous allons en décrire quelques-uns de façon plus détaillée.

a) *Thermocouples*

Le capteur thermocouple est basé sur le phénomène de thermoélectricité. Quand on joint deux métaux, il apparaît une différence de potentiel à la jonction ou soudure. Celle-ci, appelée effet Seebeck, est due à la combinaison de deux effets physiques :

- effet Peltier : dissymétrie des distributions électroniques de deux métaux différents ;
- effet Thomson : mouvement des électrons dans un conducteur dont la température n'est pas uniforme.

La tension ainsi obtenue est toujours de faible valeur typiquement de quelques dizaines de millivolts. Différents métaux sont ainsi associés pour couvrir diverses

gammes et sensibilités de températures. Les principaux types de thermocouples, ainsi que la gamme de mesures associée, sont donnés dans le tableau 10.5.

TABLEAU 10.5. Les principaux types de thermocouples (* : Cuivre-Nickel, ** : Nickel-Chrome, *** : Nickel-Aluminium.).

Type	Métaux		Température (°C)	Tension (mV)
E	Chromel	Constantan*	−270° à 1 000°	−9 à 76
J	Fer	Constantan*	−270° à 1 200°	−8 à 69
K	Chromel**	Alumel***	−270° à 1 370°	−6 à 55
T	Cuivre	Constantan*	−270° à 400°	−6 à 21
S	Platine-10 % Rhodium	Platine	−50° à 1 770°	0 à 19

Il est important de noter que ces métaux étant connectés au système de mesure par un câble de nature différente (cuivre en général), il est nécessaire de réaliser une soustraction des tensions dues à ces soudures dites froides car ne servant pas à mesurer une température. Cette opération s'appelle la compensation de soudure froide (figure 10.6).

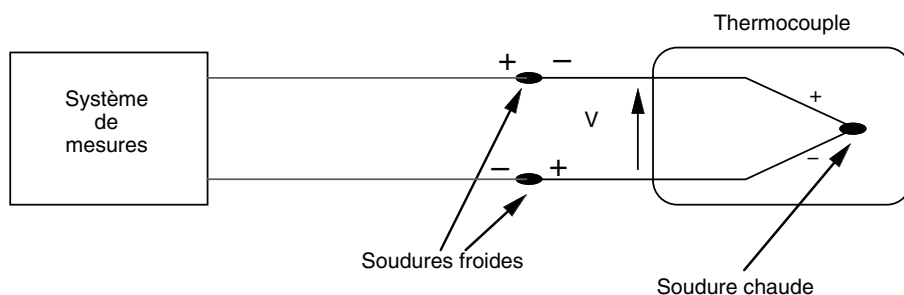


Figure 10.6. Configuration d'une mesure de température par thermocouple.

Les thermocouples se présentent généralement sous la forme d'un montage en « canne pyrométrique », c'est-à-dire encapsulés dans une gaine avec isolant (figure 10.7a, page suivante). Ce type de montage est adapté à des mesures de températures très lentement variables, comme la régulation d'enceintes thermostatées, car la constante de temps du thermocouple est grande étant donné les différents éléments à mettre en température.

Par contre, étant donné la protection du thermocouple, l'environnement de mesures peut être sévère : corrosif, particules en suspension, etc. Il existe un autre type de montage de thermocouples sans encapsulation qui permet d'améliorer fortement la constante de temps (ou temps de réponse) du thermocouple (figure 10.7b, page suivante).

Enfin la relation entre la tension mesurée et la température est de type polynomiale, il est donc nécessaire de réaliser une linéarisation de la mesure pour obtenir le résultat en « grandeur température ». Cette linéarisation se fait avec la compensation

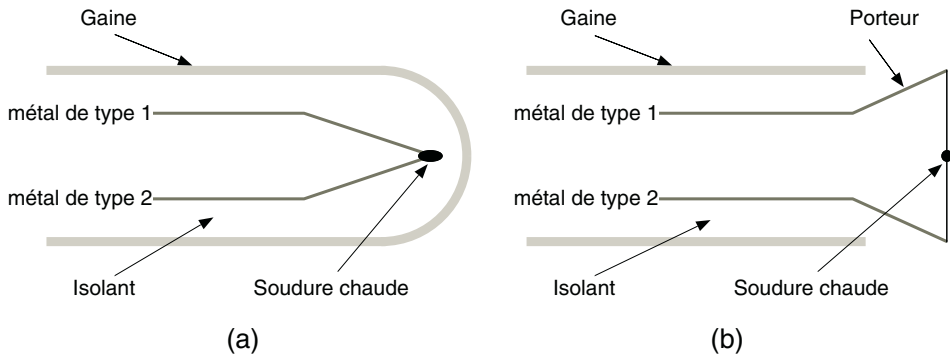


Figure 10.7. Les deux types de fabrication de thermocouples : (a) pour des mesures de températures stables et dans des environnements sévères, (b) pour des mesures de températures rapidement variables (jusqu'à qq 100 Hz).

de soudure froide réalisée en référence à la température ambiante. Là aussi cette double fonction est souvent disponible dans les systèmes de conditionnement. Ainsi pour une plage de température ambiante T_a , il faut calculer la différence de potentiel induite e_a :

$$e_a = P_1(T_a) \quad \text{avec } P_1 : \text{polynôme de compensation}$$

Ensuite, étant donné une différence de potentiel mesurée e_m , la température mesurée correspondante est donnée par :

$$T_m = P_2(e = e_m + e_a) \quad \text{avec } P_2 : \text{polynôme de linéarisation}$$

L'exemple des deux polynômes de compensation et de linéarisation de deux thermocouples très utilisés (type K et S) est reporté dans le tableau 10.6. Les systèmes de conditionnement de signaux intègrent très souvent cette fonction (paragraphe suivant).

TABLEAU 10.6. Exemples des polynômes de compensation et de linéarisation pour deux thermocouples.

Type	P_1			P_2						
	Cte.	coeff. T_a	coeff. T_a^2	Cte.	Coeff. e	coeff. e^2	coeff. e^3	coeff. e^4	coeff. e^5	coeff. e^6
K	$2,4725 \times 10^{-3}$	$3,9466 \times 10^{-2}$	$1,6865 \times 10^{-5}$	$3,1574 \times 10^{-1}$	$2,3834 \times 10^{-1}$	$1,9823 \times 10^{-1}$	$-1,7533 \times 10^{-2}$	$5,7909 \times 10^{-4}$	$-8,3355 \times 10^{-6}$	$4,6096 \times 10^{-8}$
S	$-2,7668 \times 10^{-5}$	$5,4580 \times 10^{-3}$	$1,0383 \times 10^{-5}$	$3,9177$	$1,5374 \times 10^2$	$-1,5288 \times 10^1$	$2,2848$	$-1,9653 \times 10^{-1}$	$8,4701 \times 10^{-3}$	$-1,4134 \times 10^{-4}$

b) Capteurs à variation de résistance

➤ Capteurs potentiométriques

Le capteur potentiométrique est le capteur de base de la mesure des positions ou des déplacements (supérieurs à 0,1 mm).

En effet l'objet dont on désire mesurer la position ou le déplacement est rendu solidaire mécaniquement du curseur du potentiomètre. Ainsi la variation de résistance entre le point curseur et une extrémité de référence est directement linéairement traduite par une variation de tension (figure 10.8).

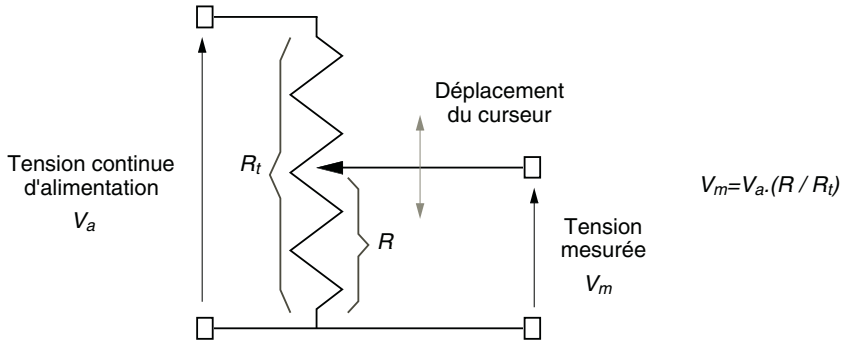


Figure 10.8. Schéma de principe du montage d'un capteur potentiométrique.

Ces capteurs, comme nous l'avons vu dans le tableau général, peuvent être utilisés pour la mesure de grandeurs physiques autres que le déplacement proprement dit. En effet, il suffit de transformer la variation de la grandeur physique à mesurer en un déplacement (figure 10.9) :

- mesure de force : déformation d'un ressort liée à un potentiomètre ;
- mesure de pression : capteur à cellule déformable ;
- débit de fluides : capteur avec déplacement d'un curseur dans le fluide ;
- capteur de niveau de fluides : capteur avec un système de flotteur.

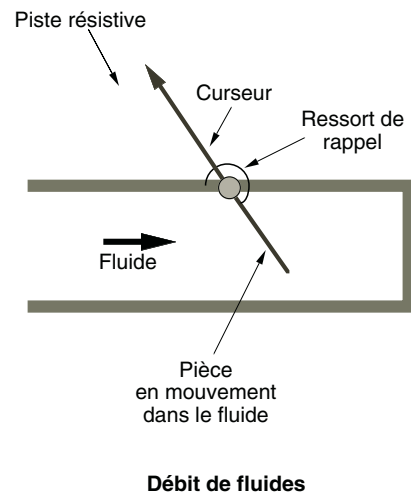
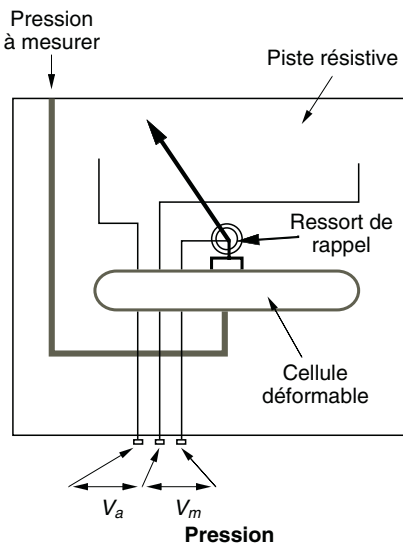


Figure 10.9. Différentes utilisations d'un capteur potentiométrique.

L'inconvénient majeur de ce type de capteur est l'usure mécanique de la piste résistive qui conduit à un changement du capteur.

► Capteurs extensométriques

Les capteurs extensométriques sont basés sur la variation de résistivité due à une déformation d'un élément résistif (fil, couche, etc.). Ces capteurs, aussi appelés jauges de contraintes, conduisent à des variations de résistances faibles ; aussi la mesure ne sera pas une mesure directe de tension comme précédemment, mais la résistance de ce capteur est placée dans un pont de type Wheastone. Le pont étant initialement équilibré, la variation de résistance, va conduire à une variation de la tension aux autres bornes du pont (figure 10.10).

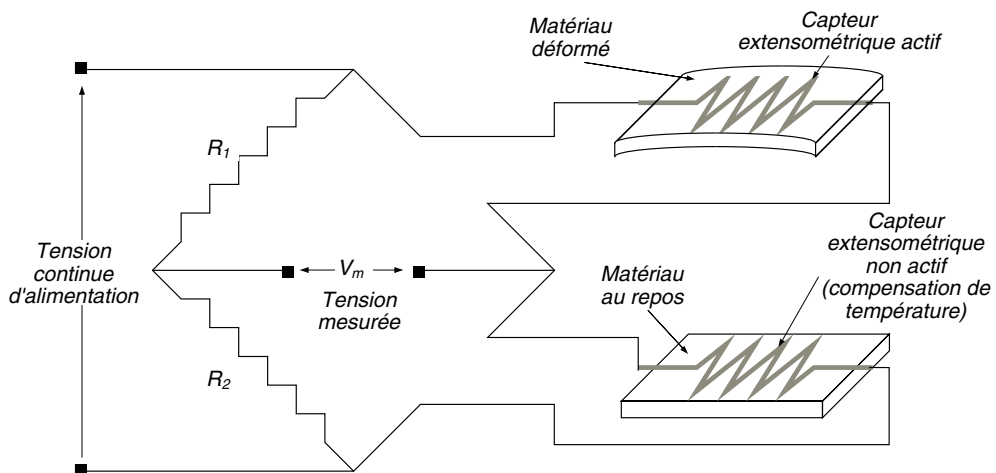


Figure 10.10. Montage d'utilisation des capteurs extensométriques dans un pont résistif avec une jauge de compensation de température.

La tension mesurée aux bornes du pont V_m est directement proportionnelle à la variation relative de résistance :

$$V_m \propto \frac{\Delta R}{R}$$

De même la variation relative de résistance de la jauge est proportionnelle à la variation relative de l'allongement de la jauge :

$$\frac{\Delta R}{R} = K \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad \text{avec } K \text{ le facteur de jauge}$$

Ces capteurs sont très utilisés pour la mesure de déformations, ou indirectement de contraintes, de forces, de pressions, de couples qui produisent ces déformations. Étant donné la possibilité de mesurer de très faibles déformations ou déplacements, ces capteurs sont utilisés aussi pour mesurer des grandeurs physiques produisant de très faibles déformations sur les matériaux comme l'humidité.

Ces capteurs sont relativement sensibles à la température. Aussi il est impératif d'utiliser en plus de la jauge active, subissant les déformations du matériau étudié, une jauge, dite non active (lié au même type de matériau mais ne subissant pas la déformation), pour la compensation en température. Cette jauge, insérée dans une branche adjacente du pont, permet ainsi de compenser directement l'effet de la température.

Il est important de noter la grande précision de ce type de capteur qui peut aller jusqu'à 10^{-4} .

► Capteur de température : résistances et thermistances

La résistance d'un conducteur métallique varie avec la température (figure 10.11a). Basés sur des matériaux comme le cuivre, le nickel ou le platine, ces capteurs sont plus précis que les thermocouples, mais s'adressent à des gammes de températures plus faibles : quelques centaines de degrés. S'il n'est pas nécessaire de mettre en œuvre une compensation de soudure froide comme les thermocouples, des précautions sont à prendre en ce qui concerne la variation de résistance des fils de connexions. De plus, comme dans le cas des thermocouples, il faut procéder à une linéarisation des mesures étant donné la courbe de réponse de ces capteurs.

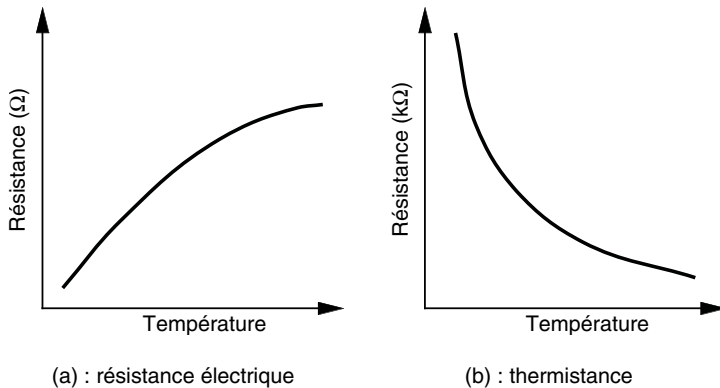


Figure 10.11. Courbes de réponse des deux capteurs de température basés sur une variation de résistivité.

Les thermistances utilisent des matériaux semi-conducteurs dont le coefficient de température est négatif, c'est-à-dire que leur résistance diminue quand la température augmente (figure 10.11b). Contrairement aux capteurs précédents, il n'est pas nécessaire d'avoir une compensation des fils de connexions étant donné l'impédance élevée.

Pour ces deux types de capteurs, le montage consiste essentiellement en une alimentation « source de courant » (alimentation d'impédance très élevée) et d'un système de mesure pour prélever la variation de tension due à la variation de résistance (figure 10.12, page suivante).

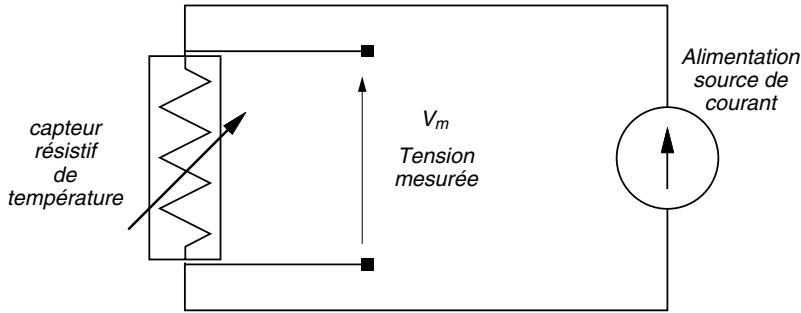


Figure 10.12. Montage des deux capteurs de température basés sur une variation de résistivité.

c) Capteurs à variation de capacité

La valeur de la capacité d'un condensateur va dépendre de trois paramètres liés à la réalisation du condensateur :

- la distance entre les armatures du condensateur : d_c ;
- la surface active des armatures du condensateur : S_c ;
- la permittivité du diélectrique séparant les deux armatures actives : ϵ_c .

La variation de l'un de ces trois paramètres conduit donc à une variation de la capacité. Cette variation de capacité peut être électriquement décelée de différentes manières : mesure de la tension aux bornes de la capacité, mesure de la tension aux bornes d'un pont oscillant, modification de la fréquence d'un oscillateur lié à ce condensateur, etc.

La variation des trois paramètres de la capacité est essentiellement obtenue par déplacement des éléments constitutifs du condensateur. On utilise principalement des condensateurs plans et des condensateurs cylindriques (figure 10.13, page ci-contre).

d) Capteurs piézo-électriques

Certains matériaux comme le quartz ou des céramiques se chargent électriquement lorsqu'ils sont sollicités par des contraintes mécaniques de compression convenablement orientées par rapport au cristal. À l'inverse leur forme peut être modifiée sous l'effet d'un champ électrique. Cet effet est linéaire dans une large gamme de mesures :

$$Q = k \cdot F$$

avec Q la quantité d'électricité, F la contrainte appliquée et k la constante de Curie ou module piézo-électrique.

Ces capteurs sont directement utilisables pour tout ce qui concerne les mesures de pressions, mais aussi les mesures de vibration ou d'accélération. Il est important de noter que ces capteurs ont des temps de réponse très courts (de l'ordre de la microseconde) et peuvent donc être utilisés en dynamique. Ainsi des capteurs piézo-électriques de type quartz sont utilisés pour mesurer l'amplitude d'onde de compression ayant une durée de l'ordre de quelques dizaines de microsecondes avec une quasi linéarité entre 0 et 50 kbar.

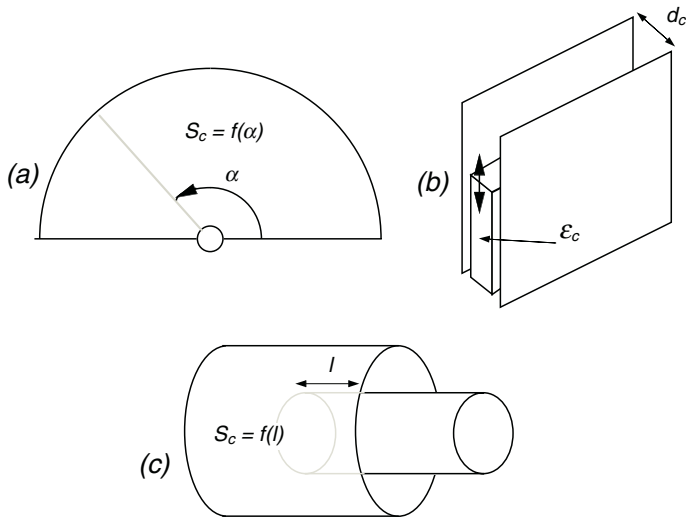


Figure 10.13. Principales formes de capteurs capacitifs : (a) condensateur plan à rotation pour la mesure de déplacements angulaires, (b) condensateur plan pour la mesure de déplacements, de pressions, de forces, de niveaux de liquide (permittivité différente de l'air), etc. et (c) condensateur cylindrique pour la mesure de déplacements.

e) Capteurs inductifs

Le principe général de ces capteurs est la variation du couplage entre deux enroulements primaires et secondaires. L'introduction ou la modification du noyau magnétique de couplage va pouvoir être mesurée par la variation de la tension électrique mesurée au secondaire alors que le primaire est alimenté par une tension alternative de référence (figure 10.14).

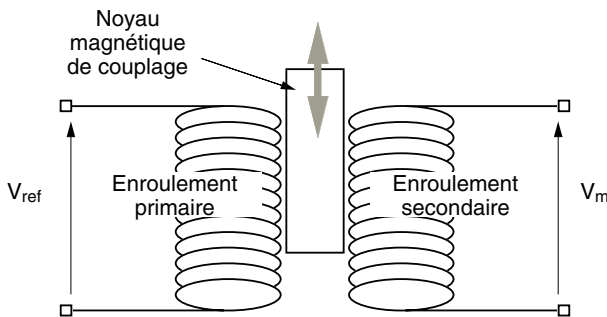


Figure 10.14. Schéma de principe d'un capteur inductif.

Ces capteurs sont évidemment utilisés pour toutes les mesures de grandeurs physiques qu'il est possible de transformer en mesures de déplacements. Ces déplacements sont alors liés au mouvement du noyau magnétique de couplage. Une autre

utilisation intéressante est comme capteur de proximité, la condition étant que la cible à détecter modifie le champ magnétique.

f) Exemples de capteurs indirects

L'accès à des grandeurs physiques n'est pas toujours possible directement par un seul capteur. Il met souvent en jeu un système de mesures lié directement au procédé qui nécessite plusieurs capteurs et ensuite un calcul à partir des différents paramètres mesurés pour accéder finalement à la grandeur physique souhaitée. Globalement on parle de mesures indirectes.

Prenons l'exemple de la mesure de vitesses ou de débits de fluides par une sonde de pression appelée « tube de Pitot ». Ces sondes sont utilisées dans les avions pour en mesurer la vitesse. Ce système de mesure est un montage permettant d'extraire la mesure de deux pressions : une pression P_t dite d'arrêt ou totale prélevée dans le sens du fluide et une pression P_s statique locale prélevée sur le bord du capteur (figure 10.15). La mesure de ces deux pressions est effectuée par des capteurs de pression classiques (capteurs capacitifs, à induction, piézo-électriques, etc.). Le système informatique d'acquisition de données doit alors réaliser un calcul à partir de ces deux pressions et aussi de la mesure de la température T (par thermocouple par exemple) pour déterminer la vitesse du fluide ou la vitesse de déplacement de l'objet dans le fluide :

$$V = F_{\text{onction}}(P_t, P_s, T)$$

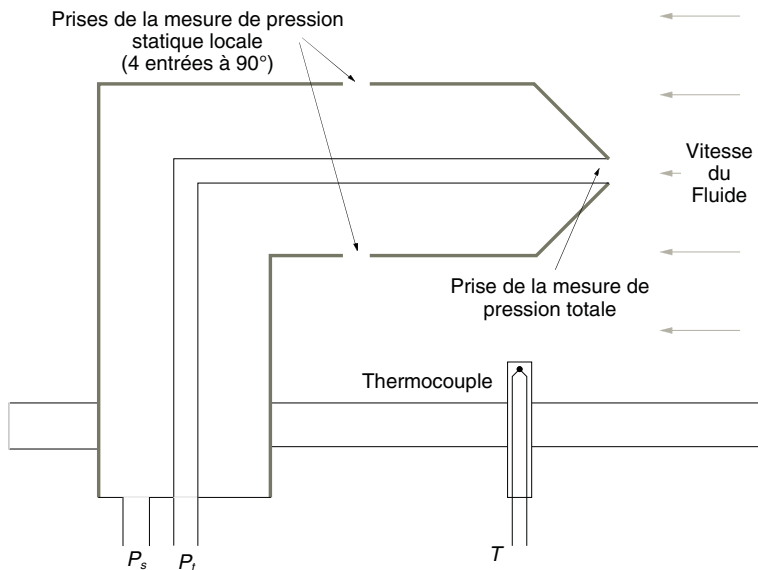


Figure 10.15. Schéma de principe en coupe d'une sonde de pression « tube de Pitot ».

Le problème est quasiment identique lors de la mesure d'un débit D d'un fluide. Le système de mesure est constitué d'un tube avec un rétrécissement de section

S_c afin d'avoir au niveau de ce col une vitesse sonique. La mesure de la pression totale P_t (manomètre simple) et de la température T (thermocouple) en amont de ce rétrécissement permet de déterminer le débit du fluide avec une relation simple :

$$V = F_{\text{onction}}(P_t, S_c, T) = K \cdot \frac{P_t \cdot S_c}{\sqrt{T}}$$

10.2.4 Les principaux types d'actionneurs

Le but de ce paragraphe n'est pas de présenter les principaux types d'actionneurs de façon aussi détaillée que pour les capteurs, mais de sensibiliser aux principes généraux utilisés pour cette fonction. Dans quelques cas les phénomènes physiques qui sont à la base des capteurs sont réversibles au sens entrée/sortie. Pour les capteurs, nous avons décrit des systèmes permettant de transformer une grandeur physique en une grandeur électrique mesurable. Pour les actionneurs, ces mêmes systèmes physiques peuvent être utilisés en les sollicitant électriquement pour faire varier une grandeur physique (effet piézo-électrique, effet magnétique...). L'exemple le plus immédiat est celui du phénomène basé sur l'induction magnétique : le déplacement du noyau de couplage magnétique provoque la variation de tension mesurée pour le capteur, un actionneur peut être réalisé en utilisant le contrôle de position d'un noyau magnétique par la tension mise aux bornes de l'enroulement.

Mais l'actionneur le plus utilisé est celui appelé du terme générique « moteur électrique ». Le mouvement de rotation obtenu permet de commander de nombreux actionneurs mécaniques (vanne, etc.). La technique des moteurs électriques a été grandement améliorée et présente un certain nombre d'avantages, comme en particulier, celui d'avoir des réglages aisés et précis : couple, vitesse, position, etc.

Le moteur est constitué de deux parties : le *stator* (partie fixe externe) et le *rotor* (partie centrale mobile). Le fonctionnement se résume à l'alimentation d'enroulements, situés dans le stator et/ou le rotor, par une tension soit continue soit alternative qui va induire un mouvement de rotation au rotor. Le principe de base est le couplage électromagnétique de deux champs tournants, l'un au niveau du stator B_s et l'autre au niveau du rotor B_r (figure 10.16, page suivante). Deux champs magnétiques tournant à la même vitesse, faisant un angle α , créent un couple électromagnétique instantané qui va produire l'entraînement du rotor par rapport au stator.

Les champs magnétiques peuvent être obtenus à partir d'aimants permanents (ferrites, alnico, terres rares ou autres composés) ou de bobines alimentées par une tension électrique.

Basés sur l'application de ce principe, trois principaux types de moteurs sont disponibles :

- les *moteurs à courant alternatif* : l'alimentation électrique est réalisée à partir de la tension alternative du secteur (50 hertz). On distingue deux classes de moteurs à courant alternatif :
 - les *moteurs synchrones* : le stator est constitué d'un bobinage polyphasé et le rotor d'un aimant permanent ou d'un bobinage alimenté en courant continu pour les grosses machines ;

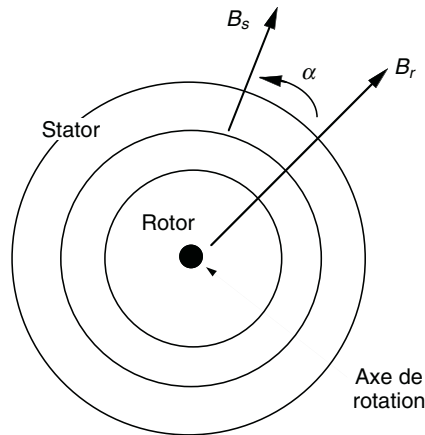


Figure 10.16. Schéma de principe de fonctionnement d'un moteur électrique.

- les *machines asynchrones* : comme précédemment le stator est constitué d'un bobinage polyphasé relié au secteur et le rotor est formé aussi d'un bobinage polyphasé fermé sur lui-même par des résistances ;
- les *moteurs à courant continu* : le stator est constitué d'un aimant permanent ou d'un électro-aimant et le rotor est formé d'un ensemble d'enroulements qui sont alimentés par une tension continue amenée par des balais frottant sur les collecteurs du rotor, l'ensemble balais et collecteurs en rotation formant un redresseur. Selon le branchement des enroulements du rotor, différents types de moteurs à courant continu ont été réalisés : le *moteur shunt*, le *moteur série*, le *moteur compound* et *compound additionnel* ;
- les *moteurs pas à pas* (variante du moteur synchrone) : le stator est constitué de bobinages polyphasés à alimentations indépendantes et le rotor est généralement formé d'un ensemble d'aimants permanents. L'alimentation successive de deux enroulements opposés du stator entraîne le moteur d'un pas (rotation entre deux pôles du rotor).

Il est impossible de citer ici tous les types de moteurs qui sont issus des familles données ci-avant. Les principales caractéristiques et applications de ces différents types de moteurs sont données dans le tableau 10.7, page ci-contre.

Pour revenir aux actionneurs en général, nous limiterons notre étude en présentant selon les grandeurs physiques les plus courantes un classement des différents actionneurs (tableau 10.8, page ci-contre).

10.3 LE CÂBLAGE

Dans toute chaîne d'acquisition de données, il est très important de bien définir les spécifications du câblage entre les sources des signaux que constituent les capteurs et les entrées du système, ou entre les sorties du système et les actionneurs (figure 10.17).

TABEAU 10.7. Les principales caractéristiques et les applications des différents moteurs.

Type de moteurs	Caractéristiques	Applications
moteur synchrone	vitesse rigoureusement constante, couple très faible au démarrage, risque de décrochage	lecteurs de disques, magnétophones, machines à tisser...
moteur asynchrone	vitesse pratiquement constante, couple fort au démarrage, fonctionnement stable, machine simple et robuste	nombreuses applications, traction automobile...
moteur shunt	vitesse pratiquement autorégulée	appareils de levage, machines outils...
moteur série	vitesse variable dans un large domaine, couple fort au démarrage	traction électrique...
moteur compound et compound additionnel	vitesse rigoureusement constante, couple élevé au démarrage	filatures, étaux-limeurs...
moteur pas à pas	commande position très simple, faibles puissances	lecteur de disquettes, imprimantes...

TABEAU 10.8. Les différents actionneurs selon la grandeur physique mise en œuvre.

Phénomène physique	Actionneurs
Température, Apport d'énergie	- résistances chauffantes (effet Joule); - chauffage par rayonnement électromagnétique : onde lumineuse (laser), onde HF, onde infrarouge...
Position et déplacement	- actionneurs inductifs, piézo-électriques...; - moteurs...
Pression et force, son	- actionneurs inductifs, piézo-électriques...; - moteurs...
Lumière	- diodes électroluminescentes; - laser; - fils incandescents (lampes)...
Débit de fluides	- actionneurs inductifs; - moteurs (vannes)...

Lors de la mise en œuvre de cette interconnexion, deux problèmes de nature très différente se posent :

- la nature du câble à utiliser ;
- la connexion effective de ce câble aux différentes entrées/sorties.

10.3.1 La nature du câble

Les paramètres de base d'un câble sont ses caractéristiques électriques qui permettent d'obtenir une modélisation ou schéma équivalent de la ligne pour un tronçon élémentaire dx (figure 10.18, page suivante). Les paramètres électriques de base sont :

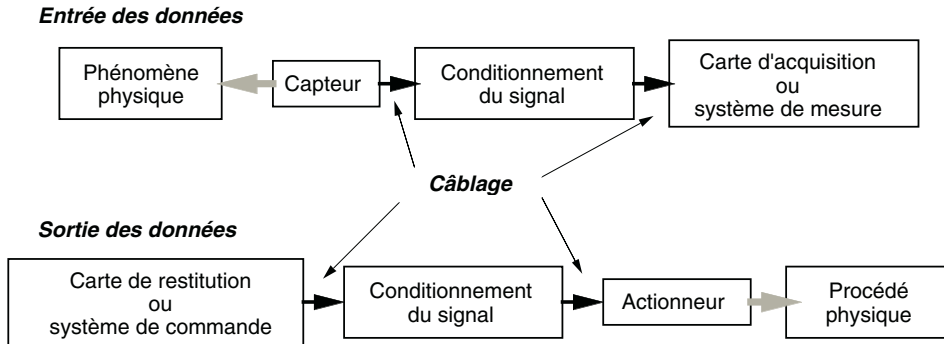


Figure 10.17. Visualisation des câblages importants.

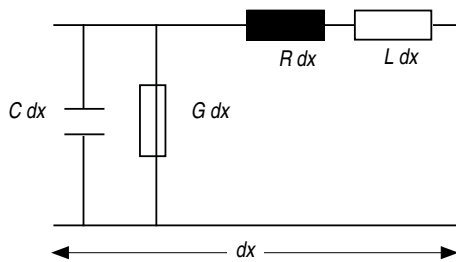


Figure 10.18. Modélisation électrique d'un câble.

- résistance linéique : R ;
- inductance linéique : L ;
- capacité linéique : C ;
- pertidance linéique (conductance transversale) : G .

Ces paramètres intrinsèques permettent de déterminer les deux caractéristiques les plus importantes d'un câble : la *bande passante* et l'*impédance*. Ils dépendent à la fois des composants utilisés pour la réalisation du câble et de la géométrie de ce câble. Une autre caractéristique essentielle est l'immunité aux bruits. Quatre catégories de câbles sont en général utilisées pour ces applications : le câble en nappe, la paire torsadée, le câble coaxial ou la fibre optique.

a) Câbles plats à plusieurs conducteurs

Ces câbles plats à plusieurs conducteurs, dits câbles en nappe, ne comportent en général pas un conducteur de retour séparé pour chacun des signaux transportés. Ceci peut alors causer un phénomène de diaphonie (couplage entre les conducteurs) nuisible à la qualité de la mesure. L'utilisation de tels câbles doit être limitée à des signaux provenant de source base impédance et sur de très courtes distances ($< 0,5$ m).

b) Paires torsadées

On appelle « paire torsadée blindée (STP : *Shielded Twisted Pair*) » ou « paire symétrique blindée » une ligne bifilaire dans laquelle les deux conducteurs sont identiques au niveau de leurs caractéristiques électriques. C'est le support le plus simple convenant à beaucoup d'applications. Ces câbles sont constitués de paires de fils isolés et toronnés, l'ensemble étant protégé des influences mécaniques ou électriques extérieures par un manteau (figure 10.19).

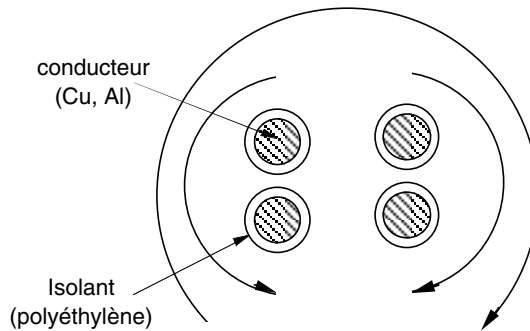


Figure 10.19. Toronnage d'un câble constitué de deux paires isolées et toronnées.

Le conducteur, constitué de cuivre ou d'aluminium, a un diamètre variant entre 0,2 à 1,5 mm. En général le toronnage est réalisé par paire de fils et ensuite par deux paires pour constituer une *quarte*. Le toronnage permet d'équilibrer l'influence du bruit sur les deux conducteurs et de pouvoir ainsi l'éliminer par la suite.

Ce type de câble, possédant un conducteur de retour par signal, permet de réaliser tous les types de connexions (paragraphe suivant).

Dans le cas d'un câble à deux fils de qualité standard, des essais normalisés (câble chargé sur 600 Ω à la fréquence de référence de 800 Hz), donnent une bande passante à 6 dB de 300 Hz–3 000 Hz. La limite d'utilisation de ce type de câbles se situe vers quelques MHz. Dans le cas d'une qualité supérieure, il est possible d'atteindre des fréquences plus élevées sur des distances courtes de quelques 10 MHz, voire supérieures à 100 MHz.

c) Câbles coaxiaux

Le câble coaxial est constitué de deux conducteurs concentriques dont le conducteur extérieur est mis à la terre et le conducteur intérieur est isolé et centré à l'aide d'un diélectrique. Les dimensions caractéristiques du câble coaxial sont le diamètre du conducteur intérieur D_i et le diamètre intérieur du conducteur extérieur D_e (diamètre de l'isolant) (figure 10.20, page suivante). À partir de ces données, deux caractéristiques électriques importantes peuvent être calculées :

- l'affaiblissement linéique qui présente un minimum pour un rapport D_e/D_i de 3,6 ;
- pour la valeur du rapport précédent, l'impédance caractéristique d'un câble coaxial est, à haute fréquence, réelle, constante et égale à 75 Ω pour une constante diélectrique relative de 1,1.

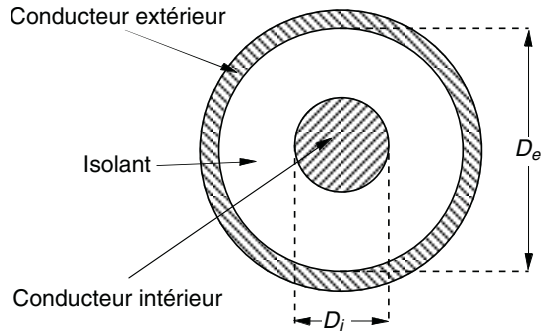


Figure 10.20. Structure d'un câble coaxial.

L'affaiblissement fréquentiel de ces câbles étant beaucoup plus faible que précédemment, ceux-ci sont donc utilisés pour transmettre des fréquences élevées jusqu'à environ plusieurs centaines de mégahertz. Ces câbles sont couramment utilisés pour la connexion de signaux télévision.

d) Fibres optiques

Dans des cas très particuliers comme l'éloignement d'un capteur et la présence de perturbations électriques externes fortes, Il est possible de mettre en œuvre un câble de type fibre optique pour le transport de l'information dans les applications d'acquisitions de données. Celui-ci présente les avantages suivants :

- une bande passante très large ;
- affaiblissement plus réduit ;
- insensibilité aux parasites électromagnétiques ;
- réduction de taille (diamètre de 0,1 mm) ;
- réduction de poids (qq. grammes au kilomètre).

Le système de transmission est basé sur le principe physique de la réflexion totale d'un rayon lumineux sur un milieu possédant un indice supérieur. Ce principe est utilisé dans la fabrication : les fibres sont constituées d'un fil central d'indice n_1 qui joue le rôle de guide d'onde et d'une gaine cylindrique d'indice n_2 avec $n_2 > n_1$. Les différents chemins, que peut emprunter un rayon lumineux qui se propage à travers le cœur de la fibre, sont appelés « modes de propagation » et l'on distingue, d'après ce critère, trois catégories de fibres (figure 10.21, page ci-contre) :

- les *fibres monomodes* : le diamètre du cœur étant très faible (qq. μm), il n'y a qu'un seul mode de propagation possible ;
- les *fibres multimodes à saut d'indice* : le diamètre du cœur étant plus grand (qq. 10 μm), différentes trajectoires sont alors possibles et conduisent à des distorsions du temps de propagation ;
- les *fibres multimodes à gradient d'indice* : elles permettent de réduire la dispersion.

Une des contraintes d'utilisation des fibres optiques est le respect des caractéristiques mécaniques : une contrainte en tension (produisant un allongement maximum admissible) et un rayon de courbure maximum.

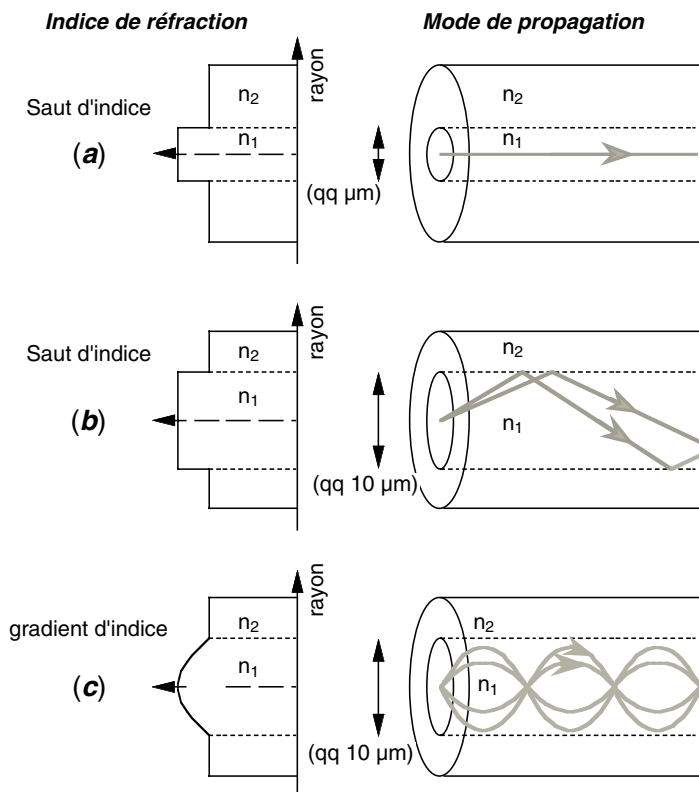


Figure 10.21. Différents types de fibres optiques : (a) à saut d'indice monomodes, (b) à saut d'indice multimodes et (c) à gradient d'indice.

L'affaiblissement intrinsèque d'une fibre est dû essentiellement à l'absorption et à la diffusion de la lumière dans le diélectrique de la fibre. La réduction de cet affaiblissement linéique est uniquement un problème technologique de réalisation des fibres à taux d'impuretés faibles. Les fibres actuelles en silice fondue ont un affaiblissement de quelques dB/km. Les longueurs d'onde les plus utilisées se situent dans l'infrarouge ($0,85 \mu m$ à $1,3 \mu m$). Des fibres optiques moins coûteuses et moins difficiles de mise en place, comme des fibres en plastique, peuvent conduire à des affaiblissements supérieurs à 100 dB/km.

En revanche il est important de noter que la réalisation nécessite une transformation momentanée du signal. En effet un système de transmission optique comporte trois composants principaux : le support de transmission (fibre optique), les dispositifs d'émission (diodes électroluminescentes ou LED, diode laser) et de réception (photodétecteur à transistors bipolaires, photodétecteurs à transistors à avalanche).

e) Conclusion

Ainsi, en fonction des caractéristiques du signal à propager, le choix du câble est guidé par une modification moindre du signal et par une protection contre les bruits

externes. D'un point de vue pratique, il est possible de réaliser un tableau comparatif de ces différents câbles suivant quatre critères : fréquence, longueur, mise en œuvre et immunité aux bruits (tableau 10.9).

TABLEAU 10.9. Comparatif des différents câbles.

Câble	Longueur	Fréquence	Mise en œuvre	Immunité aux bruits
câble plat	très faible ($< 0,5$ m)	faible (< 10 kHz)	simple	non
paire torsadée	moyenne (≈ 10 m)	moyenne (< 100 MHz)	simple	oui, moyenne
câble coaxial	moyenne (≈ 10 m)	grande (< 1 GHz)	difficile (contrainte mécanique de torsion)	oui, grande
fibre optique	grande ($< \text{km}$)	très grande	très difficile : contraintes mécaniques de torsion et de tension, transformation du signal	oui, très grande

10.3.2 Les différentes configurations du câblage

Dans le cas de la mesure d'un signal de tension, qui est le cas le plus général, il est primordial d'utiliser une entrée avec une résistance élevée pour minimiser les erreurs de mesure, en particulier dans le cas de capteurs à résistance élevée comme une thermistance ($> 1 \text{ k}\Omega$) ou un capteur de déplacement potentiométrique (de 1 à $100 \text{ k}\Omega$). En effet si la tension source V_m à mesurer a une résistance R_m et l'entrée de la carte d'acquisition a une résistance d'entrée R_a , la valeur mesurée V_a est donnée par l'équation suivante :

$$V_a = V_m \cdot \frac{R_a}{R_a + R_m} \approx V_m \quad \text{si } R_a \gg R_m$$

Avant de décrire les différentes configurations de câblage, il est important de préciser les termes « *masse* » et « *terre* ». La masse est par définition la référence par rapport à laquelle sera mesurée une tension. La terre est une masse particulière à laquelle les utilisateurs, les bâtiments ou certains systèmes (pylônes, etc.) sont plus ou moins reliés. Les utilisateurs, qui sont en contact physique avec la référence de masse « *terre* », vont avoir à manipuler des systèmes métalliques (armoires électriques, baies expérimentales, ordinateur, etc.). Pour éviter tout risque d'accident (différence de potentiel élevée entre l'utilisateur et le système manipulé), il convient alors de mettre l'objet métallique à la même référence de potentiel, au moins en ce qui concerne son enveloppe externe (coffret, armoire, etc.). Lors du câblage de cette terre, il est important d'éviter de faire des boucles (figure 10.22, page ci-contre).

Ensuite lors de la mesure de signaux à l'aide d'un câble de type paire torsadée blindée, la mesure est effectuée entre deux points dont un est considéré comme la masse, référence du signal ou de plusieurs signaux. Il est possible de réunir le blindage du câble à cette masse du signal pour rendre efficace le blindage. Mais il

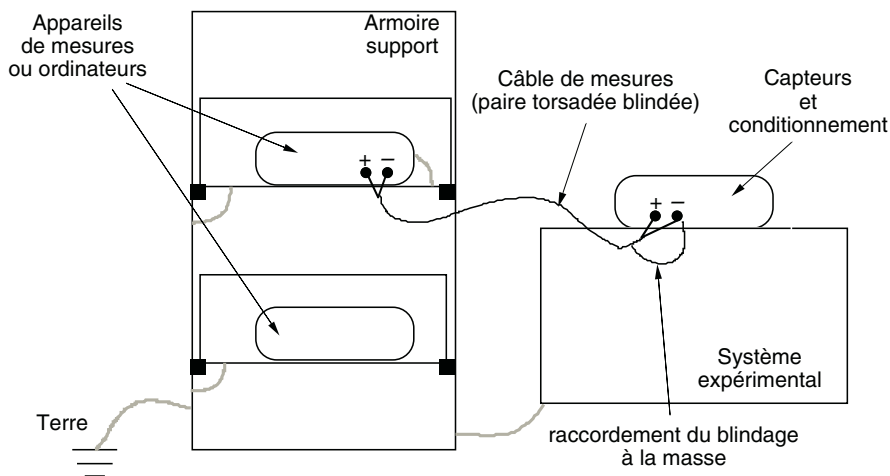


Figure 10.22. Représentation du câblage de la terre et du blindage (trait grisé : liaison terre).

est très important de noter que ce raccordement à la masse du signal ne doit se faire impérativement qu'à une seule extrémité du câble (figure 10.22).

La connexion effective du câble utilisée va dépendre à la fois du type de signaux mesurés et du type d'entrées du système de mesure. En ce qui concerne le signal de tension à mesurer, il faut distinguer deux classes de signaux : ceux référencés à la masse et ceux qu'ils ne le sont pas (signaux flottants) (figure 10.23). Ces derniers correspondent soit à des capteurs spécifiques (thermocouple, etc.), soit à des sorties de conditionneurs avec sorties isolées, soit à des dispositifs particuliers (batterie, etc.).

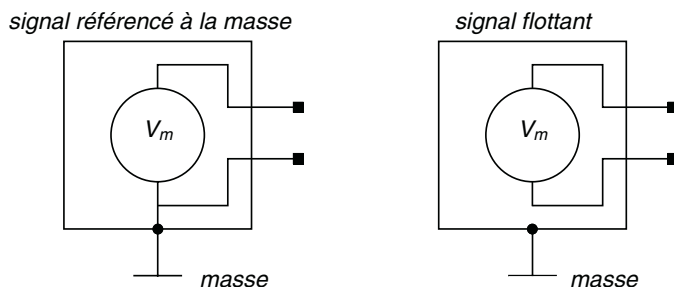


Figure 10.23. Représentation des deux types de signaux à mesurer.

De la même manière, il existe deux types d'entrées d'acquisition : le système de mesure à entrée simple (*Single Ended*) et le système de mesure à entrées différentielles ou flottantes (*Differential Input*) (figure 10.24, page suivante). Le second type d'entrées est souvent réalisé à partir du premier, c'est-à-dire qu'une carte d'acquisition à n entrées simples est souvent utilisable en $n/2$ entrées différentielles. En théorie, une mesure à entrées différentielles devrait être réalisée avec un amplificateur non référencé à une masse (alimentation par batterie) ; or en pratique, les amplificateurs, par leur alimentation, sont raccordés à la masse de l'appareil de

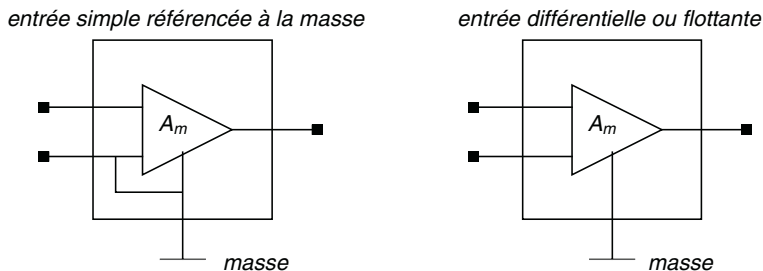


Figure 10.24. Représentation des deux types d'entrées de système de mesure.

mesure. En conséquence, la qualité de ces entrées différentielles est exprimée par la possibilité d'éliminer ou « rejeter » la différence de potentiel qui existe entre la masse et ces entrées, appelée tension de mode commun. Pour quantifier ce taux de réjection, on définit le rapport entre le gain de l'amplificateur pour une entrée différentielle et le gain pour les tensions de mode commun : taux de réjection de mode commun (TRMC ou CMRR : *Common Mode Rejection Ratio*) exprimé en dB.

Ainsi les possibilités d'interconnexions des différents signaux et entrées sont au nombre de quatre (figure 10.25, page ci-contre) :

- type 1 : signal référencé à la masse et entrée simple ;
- type 2 : signal référencé à la masse et entrée différentielle ;
- type 3 : signal flottant et entrée simple ;
- type 4 : signal flottant et entrée différentielle.

Le choix de l'un de ces câblages dépend des caractéristiques des éléments de l'application (type de capteur, etc.). Toutefois, dans certains cas, plusieurs solutions sont possibles ; aussi il faut choisir le câblage le mieux adapté à son application. Mais deux des types de câblage (1 et 4) doivent faire l'objet d'une attention particulière. En effet, dans le cas du type 1 (signal référencé à la masse et entrée simple), la masse du signal à mesurer et la masse du système de mesure ne se trouvent pas nécessairement au même potentiel : de quelques dizaines de mV à quelques centaines de mV. Ce problème, lié à une boucle de masse, conduit à ce que le signal mesuré soit la somme du signal en provenance du capteur V_m et la différence de potentiel V_b . Cette différence de potentiel peut être continue et/ou alternative (composante secteur 50 Hz). Étant donné ce résultat, ce mode de câblage doit être choisi dans des conditions particulières : tension à mesurer élevée, impédance de la boucle de masse faible. Dans les autres cas il sera préférable de choisir un mode de câblage de type 2 (signal référencé à la masse et entrée différentielle).

En ce qui concerne le cas 4 (signal flottant et entrée différentielle), la précaution à prendre consiste à mettre en place des résistances entre les entrées du système de mesure et sa masse. En effet il est nécessaire de conserver le niveau du signal d'entrée flottant dans la gamme de mesures possibles du système d'acquisition. Ces résistances, dites de polarisation, doivent être assez grandes pour conserver le principe des entrées flottantes, mais suffisamment petites pour maintenir le signal dans la gamme d'amplitudes acceptables. Ainsi, une charge résistive R_p identique sur les deux entrées du système de mesure est typiquement entre 10 k Ω et 100 k Ω .

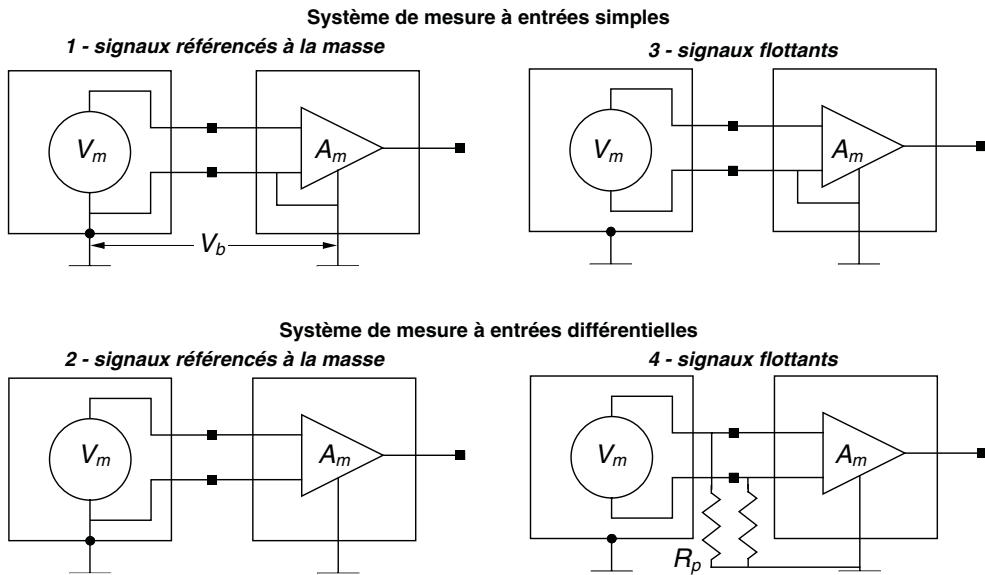


Figure 10.25. Les différentes possibilités d'interconnexions entre les signaux à mesurer et les entrées des cartes d'acquisition.

10.4 LE CONDITIONNEMENT DE SIGNAUX

Dans une chaîne industrielle d'acquisition et de restitution de données, le système de conditionnement de signaux se place entre les capteurs ou les actionneurs et la chaîne industrielle de mesure. Les fonctions de conditionnement des signaux sont multiples et variées :

- alimentation du capteur ou de l'actionneur : isolement de cette tension par rapport à celle du système de mesure, tension d'alimentation différente en niveau ou en puissance (+12 V =, 24 V =, 12 V ≈, etc.)...
- amplification (adaptation de niveau) et/ou modification du type du signal (de courant en tension) afin d'éviter une transmission d'un signal de bas niveau sur de longues distances ;
- isolement galvanique : protection du système de mesure contre les surtensions transitoires élevées pouvant survenir sur le capteur, protection contre les tensions négatives, etc. ;
- filtrage : filtrage du bruit (filtrage passe-bas, filtre réjecteur des harmoniques du secteur...), filtrage antirepliement... ;
- traitement spécifique à des capteurs : linéarisation (thermocouples...), compensation (thermocouples, ponts de jauge, etc.)... ;
- conversion analogique-numérique ou numérique analogique (dans ce cas le système de conditionnement est en fait une carte d'acquisition déportée).

Ce système peut être intégré au système de mesure (directement au niveau des cartes d'entrées/sortie) ou séparé si, par exemple, les fonctions le nécessitent :

découplage, etc. Ainsi il est possible de distinguer trois grands types d'architectures (figure 10.26) :

- les modules de conditionnement simple (alimentation, isolation, amplification, filtrage) ;
- les systèmes de conditionnement qui peuvent aller jusqu'à un système complet de mesure déporté ;
- des fonctions de conditionnement directement intégrées sur les cartes d'entrées/sorties du système de mesure.

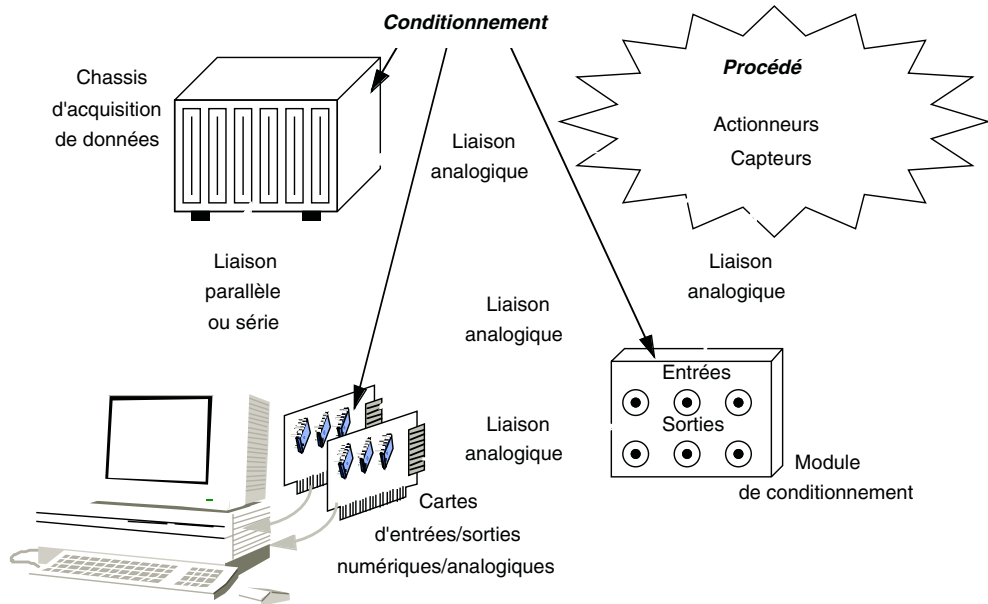


Figure 10.26. Les différentes possibilités de mise en place des fonctions de conditionnement de signaux.

Comme nous le voyons, le système de conditionnement de signaux peut aller du simple module réalisant les fonctions simples de base (alimentation, isolation, amplification, filtrage) jusqu'à un système complet de mesure déporté.

Mais, dans les systèmes de conditionnement de signaux proprement dits, il est très intéressant de noter les différentes approches suivantes (figure 10.27, page ci-contre) :

- modules individuels de conditionnement suivis d'une transmission analogique. Ces systèmes se trouvent généralement associés et localisés directement avec le capteur et sont appelés transmetteurs ;
- modules groupés de conditionnement avec multiplexage analogique (limitation du nombre de lignes de liaison entre le système de mesure et la mesure) suivi d'une transmission analogique ;
- modules groupés de conditionnement avec conversion analogique-numérique et multiplexage numérique suivi d'une transmission numérique.

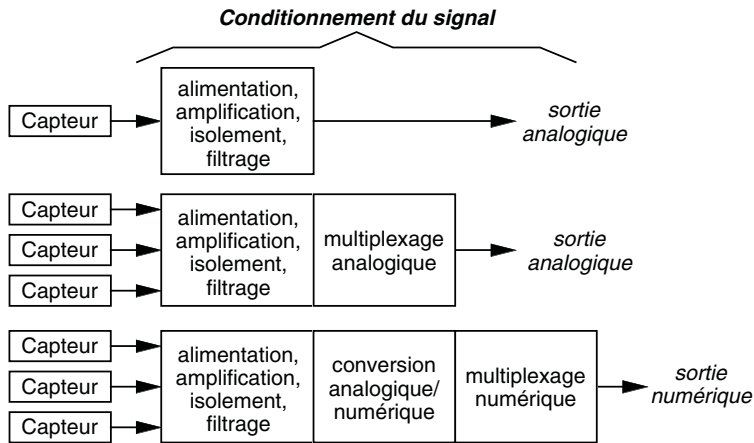


Figure 10.27. Les différentes approches des systèmes de conditionnement de signaux.

Les systèmes de conditionnement offerts sont aussi souvent spécifiquement destinés à une catégorie de capteurs donnés (paragraphe 10.2). L'exemple le plus significatif est le cas des thermocouples qui nécessitent comme nous l'avons vu une soustraction de tension (compensation de soudure froide, une linéarisation et une amplification). Aussi trouve-t-on des conditionneurs destinés à un type de thermocouple bien précis et fournissant au système de traitement une tension d'amplitude élevée (qq. V) et directement proportionnelle à la température.

Ces systèmes de conditionnement se présentent souvent sous forme très modulaire permettant de choisir et de mettre en place des modules spécifiques pour chacun des capteurs de l'application.

Remarque : Enfin il est important de noter que ce domaine du conditionnement va certainement évoluer rapidement dans les prochaines années avec le concept du capteur ou de l'actionneur « intelligent ». Ces éléments correspondent à la troisième approche présentée, augmentée d'une liaison réseau ou bus de terrain (CAN, FIP, ProfiBus, etc.). Cette configuration permet d'avoir une application dite répartie non seulement au niveau des organes de commande mais aussi au niveau des capteurs et actionneurs.

10.5 EXEMPLE D'UNE CHAÎNE INDUSTRIELLE

Afin de montrer la diversité des problèmes rencontrés dans la mise en place des systèmes de mesure, étudions un système qui doit réaliser le contrôle d'une enceinte thermostatée, c'est-à-dire :

- régulation en température de l'enceinte (loi de commande de type PID) ;
- chauffage par une résistance électrique ;
- mesure de la température intérieure (thermocouple) ;
- vérification de la fermeture de la porte de l'enceinte à l'aide d'un simple contact électrique ;
- allumage d'une lampe lorsque la température de consigne est atteinte.

La figure 10.28 donne le schéma de la chaîne de contrôle du processus industriel considéré.

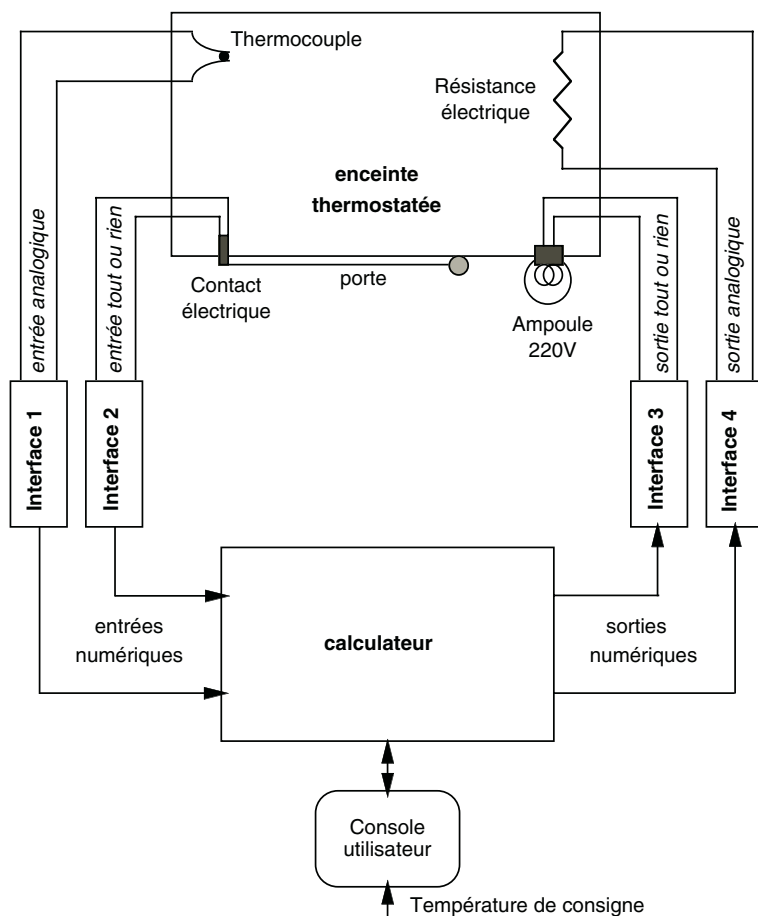


Figure 10.28. Organisation d'une chaîne industrielle : exemple d'une enceinte thermostatée.

Les interfaces, reliant les capteurs ou les actionneurs mis en place sur l'enceinte thermostatée, sont au nombre de quatre. Chaque interface correspond à un traitement particulier. Le programme de régulation de température est implanté dans le calculateur et l'utilisateur fournit simplement la température à atteindre ou température de consigne.

a) Interface 1 (liaison thermocouple - calculateur)

L'interface 1 d'entrée analogique doit comporter un amplificateur de tension (avec un gain d'environ 100) et un convertisseur analogique/numérique (figure 10.29, page ci-contre).

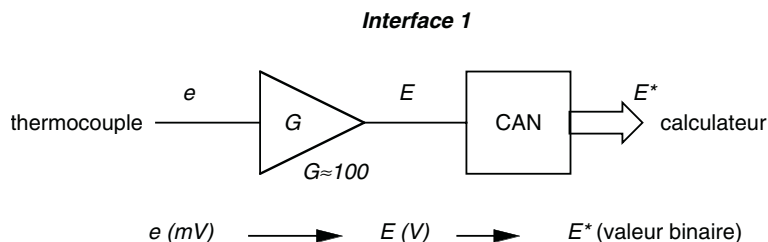


Figure 10.29. Interface 1 : saisie de l'information température.

Comme nous l'avons vu, le thermocouple fournit une tension électrique de quelques dizaines de mV fonction de la température à laquelle il est soumis. La correspondance $T = F_{\text{onction}}(V)$ (température/tension aux bornes du thermocouple) est une fonction non linéaire, donnée par les caractéristiques du thermocouple (type de matériaux utilisés). Cette loi doit donc être prise en compte au niveau du calculateur pour le traitement (comparaison avec la température de consigne).

b) Interface 2 (liaison contact électrique - calculateur)

Le contact électrique, permettant la détection de la fermeture de la porte, est un simple interrupteur à deux positions fournissant +15 V pour « porte ouverte » et 0 V pour « porte fermée ». L'interface 2 d'entrée numérique, ou tout ou rien, se résume donc à un atténuateur potentiométrique de 1/3 pour ramener la tension dans les normes TTL 0 V/5 V (figure 10.30). La tension de sortie de l'interface e' est liée à la tension d'entrée e par la relation suivante :

$$e' = e \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_1} \quad \text{avec } R_2 = 10 \text{ k}\Omega \text{ et } R_1 = 20 \text{ k}\Omega$$

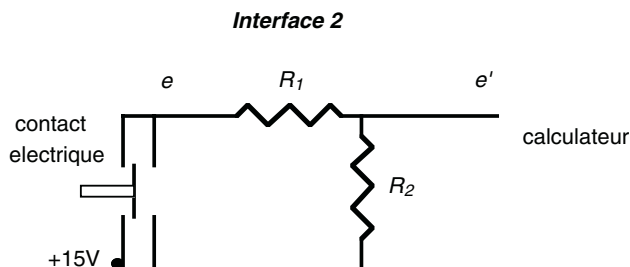


Figure 10.30. Interface 2 : saisie de l'information « fermeture porte ».

c) Interface 3 (liaison lampe - calculateur)

La lampe à allumer est alimentée en 220 V alternatif. L'interface de sortie numérique se compose donc d'un relais permettant de commuter le secteur sur la lampe tout en réalisant l'isolement électrique (figure 10.31, page suivante).

La puissance d'une sortie numérique de calculateur n'est pas toujours suffisante pour commander le relais, aussi il est nécessaire d'ajouter un amplificateur de courant.

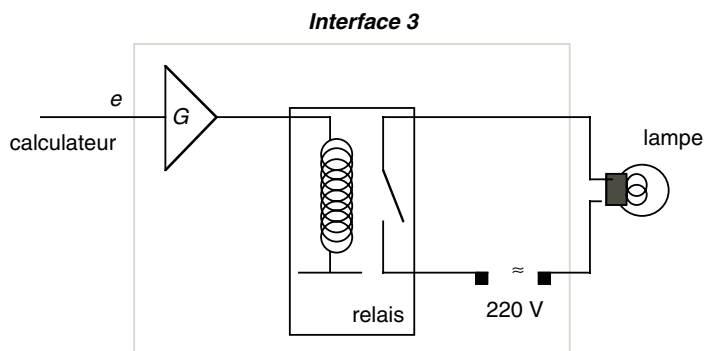


Figure 10.31. Interface 3 : commande de la lampe.

d) Interface 4 (liaison calculateur - résistance électrique)

La résistance électrique de chauffage présente une résistance ohmique très faible et nécessite donc une puissance de commande importante. L'interface 4 de sortie analogique est constituée d'un convertisseur numérique-analogique suivi d'un amplificateur de puissance (figure 10.32).

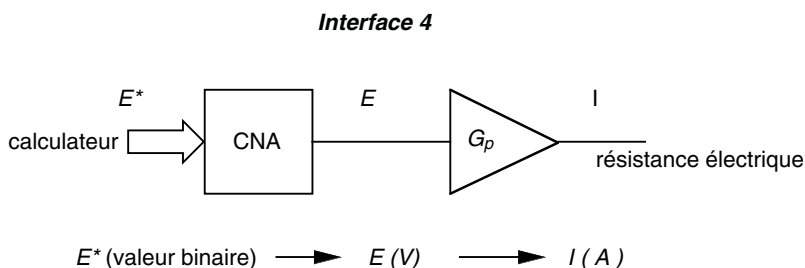


Figure 10.32. Interface 4 : commande de la puissance de chauffage.

Cet exemple montre la diversité des interfaces que l'on peut avoir à réaliser lors de la mise en place d'une chaîne de contrôle d'un processus industriel. L'étude détaillée des composants utilisés dans la mise en œuvre de ces différents types d'interfaces peut être faite en deux parties :

- les interfaces d'entrées ou de sorties numériques ;
- les interfaces d'entrées ou de sorties analogiques.

Chapitre 11

Les entrées/sorties numériques

11.1 STRUCTURE D'UNE CHAÎNE D'E/S NUMÉRIQUES

La diversité des signaux utilisés et la différence des niveaux d'énergie entre les processus industriels et les calculateurs nécessitent, comme nous l'avons vu, l'utilisation d'interfaces industrielles qui assurent les fonctions suivantes :

- adaptation ;
- filtrage (des parasites dus à l'environnement) ;
- isolement (protection de la partie numérique contre les surtensions) ;
- étage tampon (mémorisation de l'information).

11.1.1 Cas simples : signaux compatibles TTL

Un exemple de signal directement compatible avec les signaux du calculateur (type TTL) est la sortie numérique permettant de visualiser les états logiques par des diodes électroluminescentes LED (*Light Emitted Diode*) (figure 11.1, page suivante). Dans ce cas, l'interface entre le calculateur et l'extérieur se résume à une liaison simple.

De la même manière, l'entrée numérique la plus simple est constituée par un interrupteur connecté à l'entrée du calculateur permettant d'imposer un niveau logique 0 ou 1 (figure 11.2, page suivante).

Dans ce cas aussi, l'interface se résume à une liaison simple ; mais cette liaison peut se révéler être déficiente. En effet tous les interrupteurs mécaniques produisent

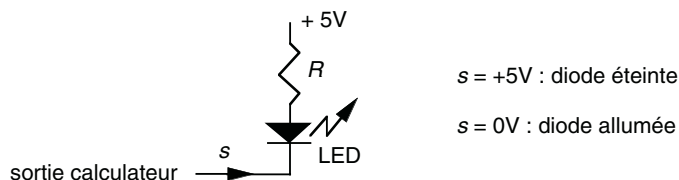


Figure 11.1. Sortie numérique compatible TTL.

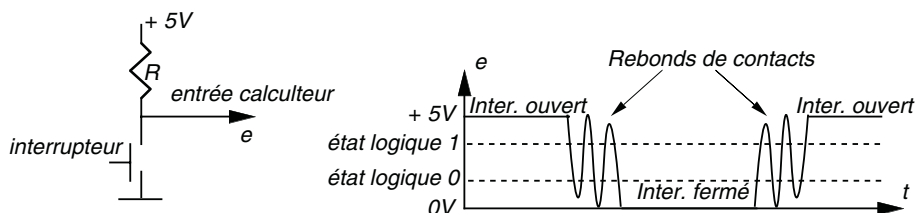


Figure 11.2. Entrée numérique compatible TTL.

des rebonds de contacts. Le signal de sortie présente alors plusieurs impulsions, à la fermeture ou à l'ouverture de l'interrupteur, qui peuvent être prises en compte au niveau du calculateur comme autant de mouvements de l'interrupteur. L'élimination des impulsions parasites, dues aux rebonds de contacts, peut se faire à partir de bascules logiques si l'on dispose d'un interrupteur à deux positions (figure 11.3).

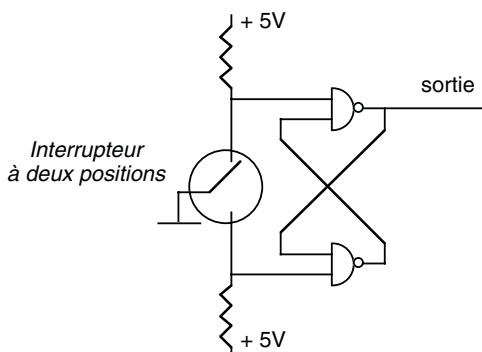


Figure 11.3. Élimination des impulsions parasites dues aux rebonds de contacts d'un interrupteur par utilisation d'une bascule.

Cette protection contre les rebonds mécaniques peut se faire aussi avec un circuit intégrateur (filtre passe-bas R-C) à la sortie de l'interrupteur, suivi d'un circuit de mise en forme (Trigger de Schmitt) pour obtenir des fronts raides (figure 11.4, page ci-contre).

11.1.2 Cas général

L'exemple précédent montre les difficultés d'interfaçage que l'on peut rencontrer pour un problème apparemment simple. Dans le cas général, aussi bien en entrée

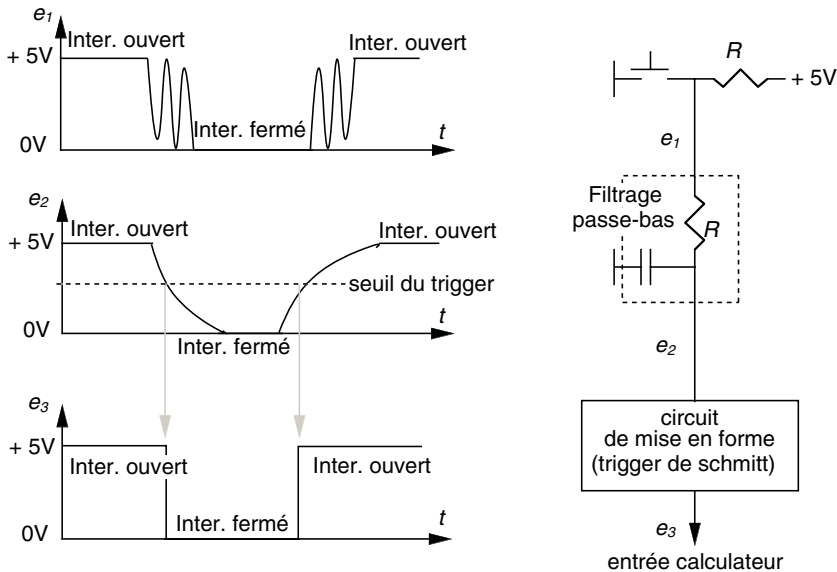


Figure 11.4. Élimination des impulsions parasites dues aux rebonds de contacts d'un interrupteur par filtrage R-C.

qu'en sortie, l'interface doit être étudiée au niveau des différentes fonctions suivantes (figure 11.5, page suivante) : adaptation, isolement, filtrage, étage tampon.

Les deux structures d'interfaces d'entrées/sorties numériques sont complètes et, suivant le cas à traiter, signal électrique à acquérir ou à fournir, les différents modules existent ou non, et sont complexes ou non. Le module d'adaptation réalise une mise à niveau du signal par rapport au calculateur soit en puissance, tension ou courant. Les modules d'isolement et de filtrage permettent d'éliminer une partie du signal électrique entre le calculateur et le processus, seule l'information est transmise. L'étage tampon permet de mémoriser l'information transmise au niveau de l'interface si le transfert n'est pas immédiat. Dans le cas d'interface complexe, on trouve généralement un module de contrôle qui est utilisé pour gérer cette interface.

Remarque : Lorsqu'un module d'isolement électrique total est mis en place au niveau de l'interface, deux alimentations séparées sont nécessaires pour la partie adaptation et filtrage et pour la partie étage tampon. Dans le cas contraire, l'isolement n'est plus réalisé puisque la masse de l'alimentation générale constitue une liaison électrique.

11.2 COMPOSANTS D'UNE CHAÎNE D'E/S NUMÉRIQUES

11.2.1 Adaptation

a) Adaptation en puissance

L'adaptation en puissance est en général assurée soit par relais électromécaniques, soit par relais statiques.

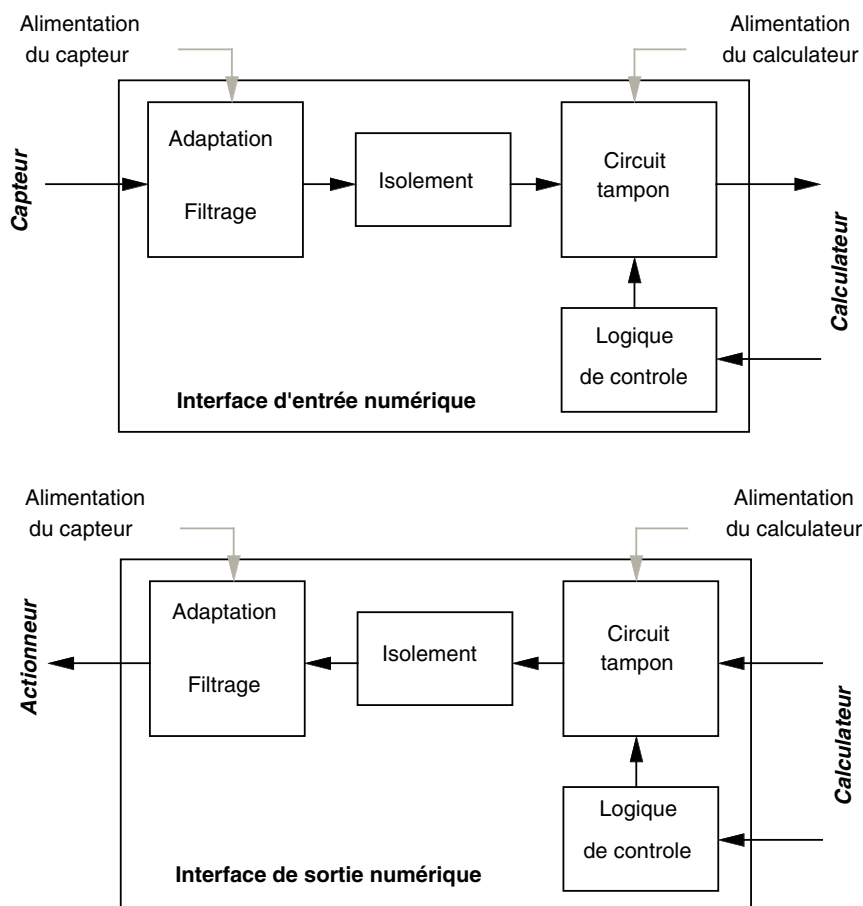


Figure 11.5. Interface d'entrée/sortie numérique.

Les *relais électromécaniques* sont d'utilisation simple et présentent un isolement électrique important de l'ordre de 1 000 V. Il se présente comme un élément possédant un gain en puissance important : la sortie bas niveau d'un ordinateur peut commander un actionneur de puissance (figure 11.6, page ci-contre). Il en existe une large gamme ; certains conservent leur position en cas de coupure secteur (relais bistables). Par contre, ils ont une durée de vie limitée (10^6 commutations) qui dépend fortement des caractéristiques du circuit commuté (courant, self, ...).

D'autre part les relais électromécaniques sont limités en fréquence (temps de réponse mécanique de l'ordre de la dizaine de millisecondes) ; cette limitation présente un avantage, c'est le filtrage des parasites hautes fréquences. De plus l'environnement industriel dans lequel le relais est installé (milieu parasité, ambiance poussiéreuse, humide, etc.) va se traduire par une résistance de contact non nulle en position fermée ($R_{on} \approx \text{qq. } 100 \, \Omega$) et non infinie en position ouverte ($R_{off} \approx \text{qq. } 100 \, \text{k}\Omega$).

Les *relais statiques* sont des étages de puissance réalisés avec des transistors pour les tensions continues et des triacs pour les tensions alternatives (figure 11.7). Ils

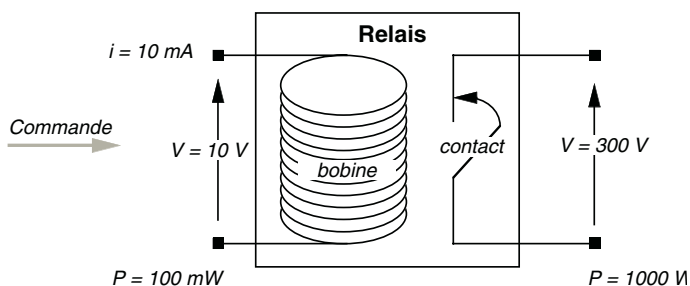


Figure 11.6. Adaptation de puissance par relais électromagnétique, exemple : gain en puissance de 10^4 .

présentent une meilleure fiabilité, une plus grande durée de vie et une bande passante plus étendue que les relais électromécaniques.

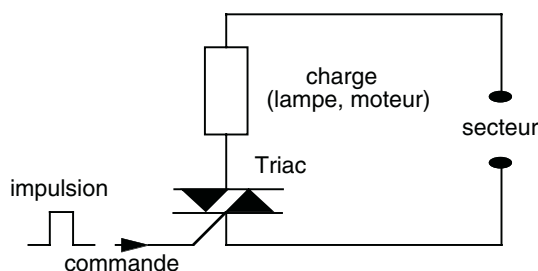


Figure 11.7. Adaptation de puissance par relais statique.

b) Adaptation de niveau

L'exemple le plus simple est celui du pont diviseur réalisé avec des résistances dans le cas où la tension d'entrée est supérieure à celle désirée (figure 11.8). Dans le cas contraire où l'on désire une tension de sortie supérieure à la tension d'entrée, on utilise un amplificateur (figure 11.9).

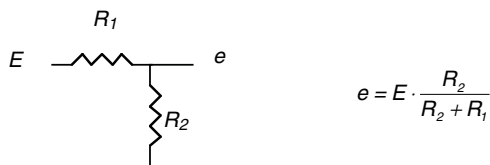


Figure 11.8. Adaptation de niveau par pont diviseur.

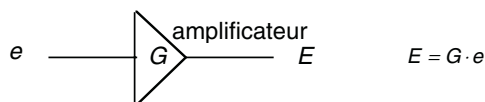


Figure 11.9. Adaptation de niveau par amplification.

c) Changement de type de signal

L'information, que l'on veut récupérer, peut être contenue seulement dans une partie du signal reçu : amplitude maximale, valeur moyenne,...

Dans ce cas il est nécessaire, au niveau de l'interface, de réaliser la transformation du signal permettant d'isoler la partie utile. Par exemple, on peut avoir besoin de transformer un signal alternatif en un signal continu par un pont de diodes (figure 11.10).

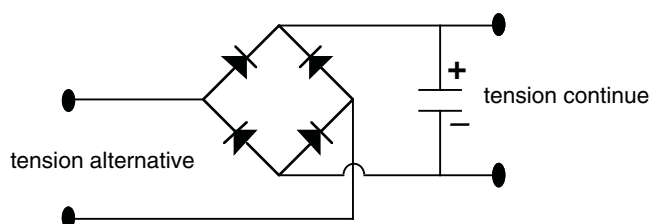


Figure 11.10. Transformation du type d'un signal.

11.2.2 Isolement et filtrage

a) Isolement électrique

Comme nous venons de le voir, les relais électromécaniques réalisent non seulement une adaptation en puissance, mais aussi un isolement électrique.

La faible fréquence de transmission ainsi que les possibles rebonds de contacts conduisent à choisir des *coupleurs optoélectroniques* lorsque l'on veut réaliser la seule fonction d'isolement. Les avantages de tels composants sont nombreux : protection contre les surtensions, isolement du système jusqu'à plusieurs milliers de volts, élimination du couplage par la masse dans le cas d'alimentations séparées (figure 11.11, page ci-contre). Les opto-coupleurs sont caractérisés par le rapport de transmission en courant CTR (*Current Transmission Ratio*) :

$$CTR = \frac{I_{\text{sortie}}}{I_{\text{entrée}}} \quad \text{exprimé en \%}$$

Les courbes, permettant de montrer leur efficacité vis-à-vis des surtensions, se présentent sous la forme : $CTR(I_{\text{entrée}})$ (figure 11.11, page ci-contre).

Il existe une grande variété de photo-coupleurs, chacun présentant des avantages spécifiques, en particulier :

- grande vitesse de transmission > Mbit/s ;
- compatibilité TTL ;
- faible courant d'entrée ;
- gain élevé.

La connexion des fibres optiques est de plus en plus facilitée par des systèmes de branchements normalisés proposés par les constructeurs. Le raccordement de la fibre au détecteur ou émetteur optique est mécaniquement simple (figure 11.12, page ci-contre).

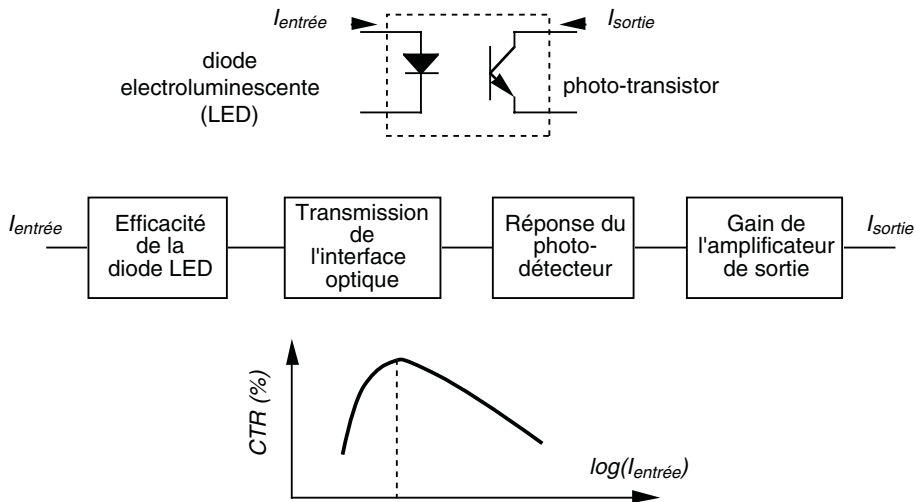


Figure 11.11. Schéma d'un coupleur optoélectronique, sa chaîne de transmission et la courbe de transmission $CTR(I_{\text{entrée}})$.

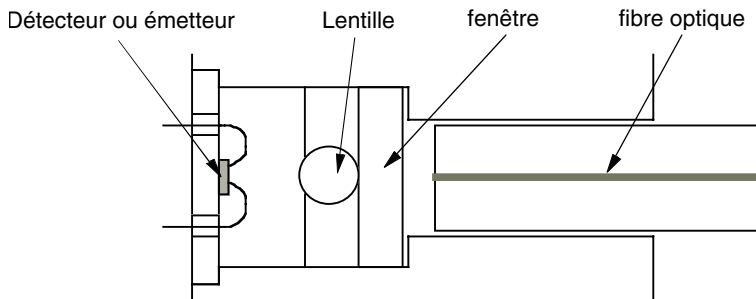


Figure 11.12. Connexion d'une fibre optique à un émetteur ou à un détecteur.

Ce système de transmission optique de l'information permet aussi d'éloigner le calculateur du processus industriel en faisant une liaison diode électroluminescente/phototransistor par fibre optique, cette liaison étant insensible aux parasites (paragraphe 10.2.1).

b) Protection

Il est possible de protéger une entrée numérique sans pour cela utiliser un circuit de découplage comme un photo-coupleur. On peut utiliser ainsi la diode dans les montages suivants :

- diode de protection contre les courants inverses (figure 11.13, page suivante) ;
- diode de protection pour écrêtage d'un signal (figure 11.14, page suivante) ;

$$-V_2 < V_s < +V_1 \quad \text{quel que soit } V_e$$

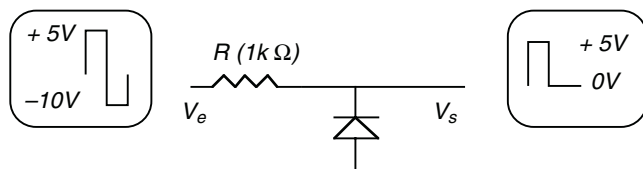


Figure 11.13. Schéma de protection contre les courants inverses.

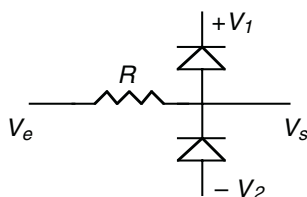


Figure 11.14. Schéma pour l'écrêtage d'un signal.

– diodes Zener pour limiter la tension (figure 11.15) :

$$\text{si } V_e < V_z \quad \text{alors } V_s = V_e$$

$$\text{si } V_e \geq V_z \quad \text{alors } V_s = V_z$$

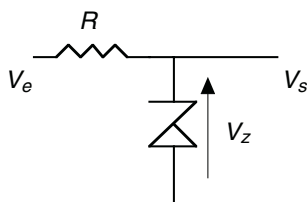


Figure 11.15. Schéma pour limiter l'amplitude d'un signal.

L'utilisation des diodes Zener est limitée à des tensions faibles (inférieures à quelques dizaines de volts). Pour des surtensions plus importantes et de variation rapide, il faut utiliser des composants de protection de types *varistances* : Ge-mov (General Electric - Metal Oxide Varistor). Ces composants sont très utilisés pour supprimer les surtensions et parasites sur le secteur. Ils couvrent une plage de tensions depuis 8V crête jusqu'à plusieurs milliers de volts et absorbent des énergies allant de 0,5 à plus de 10 000 Joules.

c) Filtrage

Une forme d'isolement est la suppression de certaines fréquences. Dans une ambiance industrielle, on filtre en général le 50 Hz et ses harmoniques proches (100 Hz et 200 Hz) par un filtre passe-haut (figure 11.16a, page ci-contre) ou un filtre réjecteur (figure 11.16b, page ci-contre). Ces filtres ont déjà été étudiés dans le chapitre 4.3.

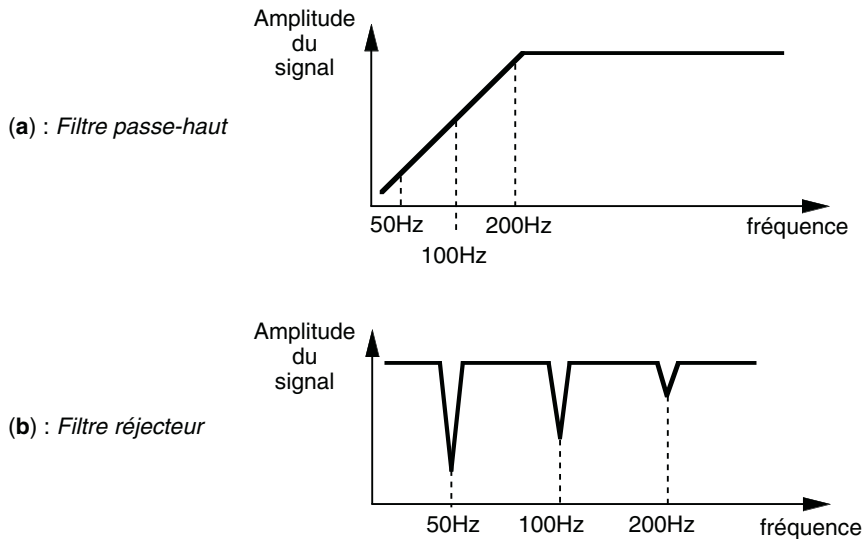


Figure 11.16. Filtrage du 50 Hz et de ses harmoniques.

11.2.3 Étage tampon

Cet étage tampon peut avoir les fonctions suivantes :

- mémorisation des données ;
- adaptation à un bus de données (circuits 3 états) ;
- synchronisation par la logique de commande.

11.3 EXEMPLE D'UNE INTERFACE D'E/S NUMÉRIQUES

La communication la plus simple entre deux éléments est la transmission des signaux de type *série asynchrone* « *full-duplex* », c'est-à-dire que deux lignes électriques suffisent pour le transfert des données : une ligne de transmission des données (*Tx Data*) et une ligne de réception des données (*Rx Data*). Les caractéristiques de la transmission ont été standardisées selon la norme EIA RS232C (norme américaine : *Electronic Industries Association*) ou CCITT V24/V.28 (norme européenne : *Comité Consultatif International des Télégraphes et Téléphones*). Les signaux électriques ne correspondent plus à des niveaux TTL mais à deux tensions +12 V et -12 V (figure 11.17, page suivante).

L'utilisation d'un signal d'amplitude 24 V permet de réaliser des transmissions de grandes distances (qq. 10 m) et avec une immunité aux bruits plus grande : le rapport signal sur bruit est augmenté. Cette transmission série est aussi normalisée au niveau du codage de l'information (nombre de bits...), de la vitesse de transfert (exprimée en bauds ou bit/s), etc.

Ces niveaux n'étant pas des niveaux capables d'être fournis directement par des systèmes à microprocesseurs ou des circuits numériques, une interface est nécessaire pour réaliser l'adaptation.

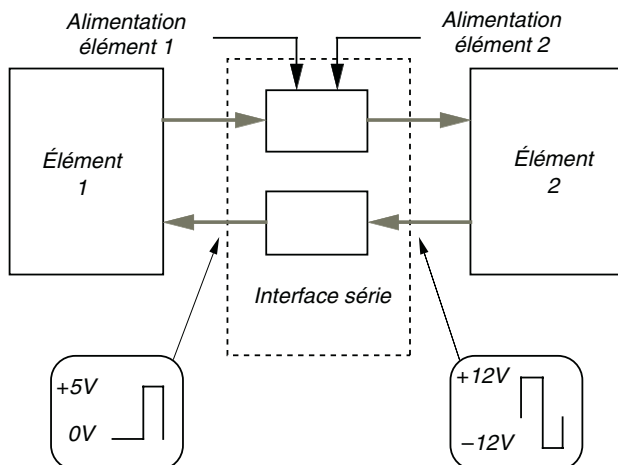


Figure 11.17. Schéma de principe d'une transmission série norme RS 232.

Cet interfaçage est facilement réalisé à partir de deux circuits intégrés spécifiques *MC 1488* et *MC 1489* conçus par Motorola (figure 11.18) ou encore par le circuit *LT 1081* de Linear Technology. Ces circuits permettent d'inverser le signal et de transformer le niveau de tension en ± 12 V (1488) ou en 0 V/5 V (1489). L'interface est alors très simple et se résume à deux circuits intégrés (figure 11.19).

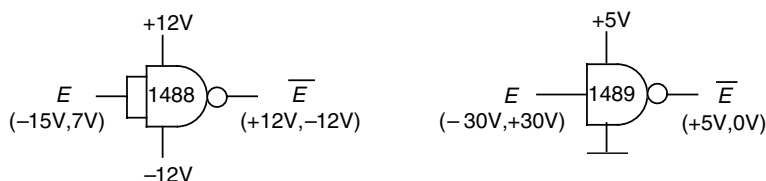


Figure 11.18. Circuits spécifiques pour interface série : 1488 et 1489 (Motorola).

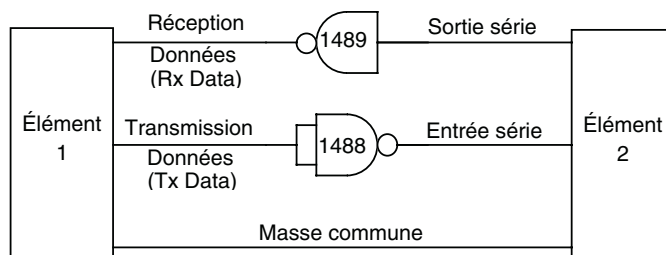


Figure 11.19. Interface série simple : adaptation des niveaux électriques.

Si l'on désire réaliser une interface assurant un isolement des masses, le circuit utilise des photocoupleurs (figure 11.20, page ci-contre). Les deux alimentations sont alors différentes : alimentation +5 V du côté ordinateur (élément 1) avec des circuits

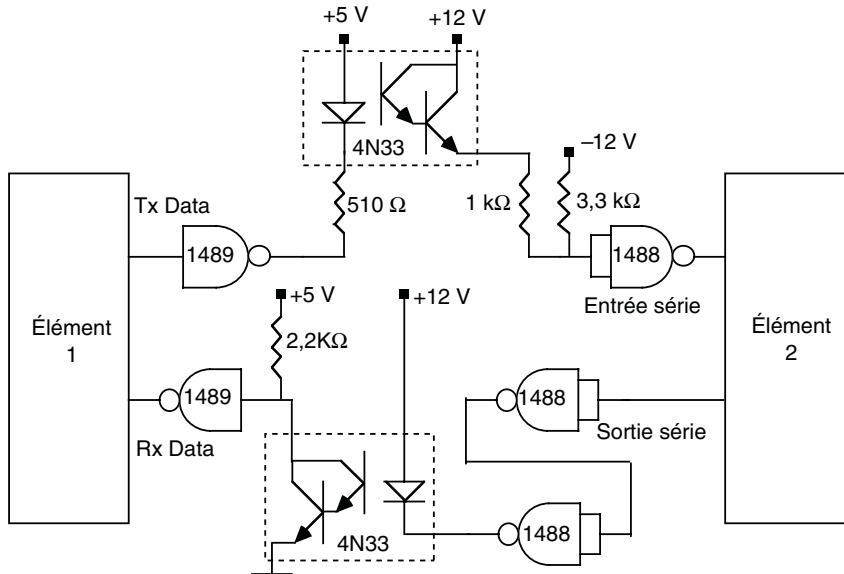


Figure 11.20. Interface série RS 232 avec isolement.

1489 et alimentation ± 12 V du côté de l'élément 2 avec des circuits 1488. Les circuits spécifiques sont ici utilisés comme inverseurs de signaux et amplificateurs de sortie pour fournir le courant nécessaire au fonctionnement des photocoupleurs (4N33).

Le fonctionnement de cette interface est le suivant :

- liaison élément 1 vers élément 2 (passage 0/5 V en ± 12 V) :

0 V $\rightarrow$ +5 V (sortie 1489) $\rightarrow$ diode éteinte
 $\rightarrow$ transistor bloqué $\rightarrow$ -12 V (entrée 1488) $\rightarrow$ +12 V
 5 V $\rightarrow$ 0 V (sortie 1489) $\rightarrow$ diode allumée
 $\rightarrow$ transistor saturé $\rightarrow$ +12 V (entrée 1488) $\rightarrow$ -12 V

- liaison élément 2 Vers élément 1 (passage ± 12 V en 0/5 V) :

+12 V $\rightarrow$ +12 V (sortie 2° 1488) $\rightarrow$ diode éteinte
 $\rightarrow$ transistor bloqué $\rightarrow$ +5 V (entrée 1489) $\rightarrow$ 0 V
 -12 V $\rightarrow$ -12 V (sortie 2° 1488) $\rightarrow$ diode allumée
 $\rightarrow$ transistor saturé $\rightarrow$ 0 V (entrée 1489) $\rightarrow$ +5 V

Chapitre 12

Les entrées/sorties analogiques

12.1 INTRODUCTION

Le but de la conversion analogique-numérique ou numérique-analogique est de faire correspondre un nombre binaire N à une tension analogique V . Le nombre binaire N sera caractérisé par son nombre de bits (ou chiffres) a_0 à a_{n-1} pour n bits ($a_i = 1$ ou 0) :

$$N = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0$$

a_0 étant le bit de poids faible ou LSB (*least significant bit*) et a_{n-1} le bit de poids fort ou MSB (*most significant bit*).

Le nombre décimal correspondant est :

$$N_{\text{décimal}} = a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0$$

La valeur de la tension V à traduire (CAN) ou traduite (CNA) est discrète et multiple d'une valeur de base appelé le *quantum de conversion* q (tension analogique élémentaire) ; on a la relation :

$$V_{\text{en volt}} = q_{\text{en volt}} \cdot N_{\text{décimal}}$$

soit

$$V = q \cdot (a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0)$$

Ainsi les deux principales caractéristiques d'un convertisseur analogique-numérique ou numérique-analogique sont donc :

- nombre de bits : n ;
- tension analogique élémentaire : q .

La réalisation électronique des convertisseurs utilise des circuits intégrés linéaires ou amplificateurs opérationnels (annexe G). Les convertisseurs analogique-numérique utilisant des convertisseurs numérique-analogique dans leur structure, nous commencerons par étudier la conversion numérique-analogique. Nous terminerons ce chapitre par l'étude d'un composant directement lié aux convertisseurs analogique-numérique l'échantillonneur/bloqueur.

12.2 LA CONVERSION NUMÉRIQUE ANALOGIQUE

12.2.1 Introduction

La conversion numérique-analogique, que nous désignerons par *CNA*, consiste à transformer une information disponible sous forme binaire en une information analogique (figure 12.1) :

$$V_s = q \cdot (a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0)$$

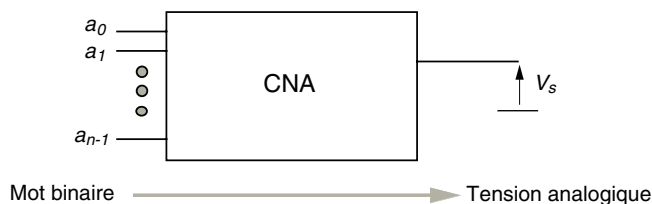


Figure 12.1. Schéma fonctionnel d'un convertisseur numérique-analogique.

La valeur analogique maximale $V_{s, \max}$ sera donc :

$$V_{s, \max} = q \cdot (2^n - 1)$$

et la valeur minimale $V_{s, \min}$ autre que 0 :

$$V_{s, \min} = q$$

La tension analogique de sortie pourra donc prendre 2^n valeurs différentes que l'on peut écrire :

$$V_s = i \cdot q \quad \text{avec } i \in [0, 2^n - 1]$$

Toutes ces caractéristiques sont traduites par la figure 12.2, page ci-contre, qui montre la courbe de transfert permettant de passer d'une information numérique à la sortie analogique correspondante. En pratique, on emploie essentiellement des CNA du type parallèle et plus particulièrement :

- CNA à résistances pondérées ;
- CNA à réseau en échelle $R-2R$.

Dans l'étude des circuits CNA, les différents bits du nombre binaire vont être symbolisés par un interrupteur (0 : ouvert, 1 : fermé). Les composants électroniques CNA contiennent effectivement des interrupteurs, mais des interrupteurs analogiques (transistor MOS) commandables par signaux électriques TTL.

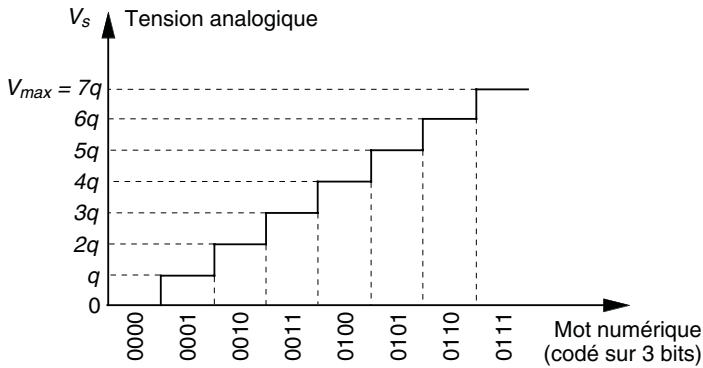


Figure 12.2. Courbe de transfert numérique-analogique.

12.2.2 Convertisseur à résistances pondérées

Le principe du convertisseur à résistances pondérées est la sommation de courants à l'aide d'un amplificateur opérationnel (figure 12.3). Les interrupteurs, correspondant aux bits a_0 à a_{n-1} , mettent en service des résistances de valeurs croissantes dans le rapport 2, toutes alimentées par la même source V_{ref} . Par conséquent la résistance $2^k R$ est parcourue par un courant deux fois moindre que la résistance $2^{k-1} R$. Les courants élémentaires, correspondant aux poids respectifs des bits, sont sommés par l'amplificateur opérationnel.

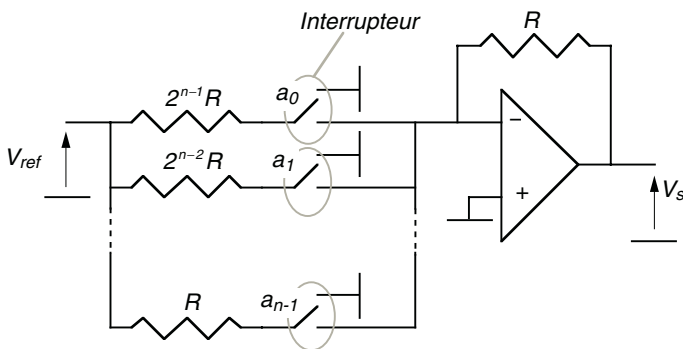


Figure 12.3. Convertisseur N/A à résistances pondérées.

En écrivant l'égalité des courants à l'entrée inverseuse de l'amplificateur opérationnel, il vient :

$$\frac{V_s}{R} = - \left[\frac{V_{\text{ref}} \cdot a_{n-1}}{2^{n-1} R} + \dots + \frac{V_{\text{ref}} \cdot a_1}{2^2 R} + \frac{V_{\text{ref}} \cdot a_0}{2^1 R} \right]$$

d'où

$$V_s = -V_{\text{ref}} \cdot \left[a_{n-1} + \dots + \frac{a_1}{2^{n-2}} + \frac{a_0}{2^{n-1}} \right]$$

Soit la forme cherchée :

$$V = \frac{-V_{\text{ref}}}{2^{n-1}} \cdot (a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0)$$

Le quantum de conversion est donc :

$$q = -\frac{V_{\text{ref}}}{2^{n-1}}$$

La gamme étendue des résistances nécessaires (par exemple de 10 kΩ pour le MSB à 1,28 MΩ pour le LSB dans un CNA de 8 bits) rend difficile la réalisation de ce type de CNA :

- soit en composants discrets : difficulté d'avoir des résistances de valeurs non normalisées de très grande précision et de grande stabilité en température ;
- soit en micro-électronique : difficulté d'intégration de résistances de grandes valeurs ($> 1 \text{ M}\Omega$) et réalisation coûteuse pour obtenir une grande précision sur les résistances (usinage par sablage ou par laser).

Aussi préfère-t-on généralement réaliser des blocs de quatre valeurs seulement (de R à $8R$) qui sont regroupés par un autre amplificateur monté en sommateur (figure 12.4). La première structure CNA des quatre bits de poids faible donne une tension V_1 :

$$V_1 = -V_{\text{ref}} \cdot \left[a_3 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{8} \right]$$

et la deuxième structure CNA des quatre bits de poids fort donne une tension V_2 :

$$V_2 = -V_{\text{ref}} \cdot \left[a_7 + \frac{a_6}{2} + \frac{a_5}{4} + \frac{a_4}{8} \right]$$

d'où le résultat attendu V_s pour un CNA de 8 bits :

$$V_s = -\left[\frac{V_1}{16} + V_2 \right] = -V_{\text{ref}} \cdot \left[a_7 + \frac{a_6}{2} + \frac{a_5}{4} + \frac{a_4}{8} + \frac{a_3}{16} + \frac{a_2}{32} + \frac{a_1}{64} + \frac{a_0}{128} \right]$$

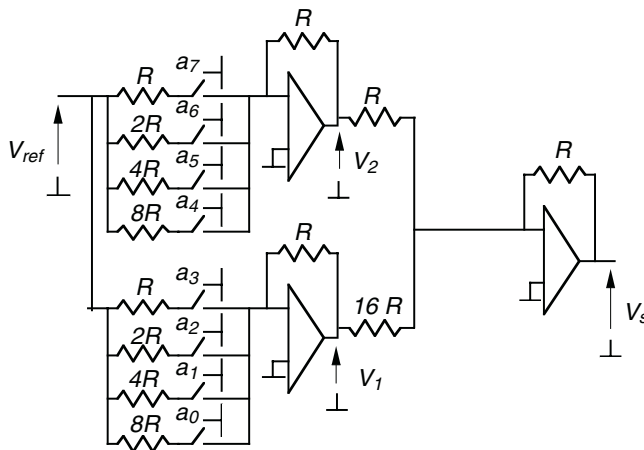


Figure 12.4. Convertisseur à résistances pondérées dans lequel on réduit l'étalement des valeurs des résistances par utilisation d'un amplificateur supplémentaire.

12.2.3 Convertisseur à réseau en échelle R - $2R$

Par rapport au précédent, ce type de convertisseur N/A offre l'avantage de n'utiliser que deux valeurs de résistances, simple R et double $2R$ (figure 12.5).

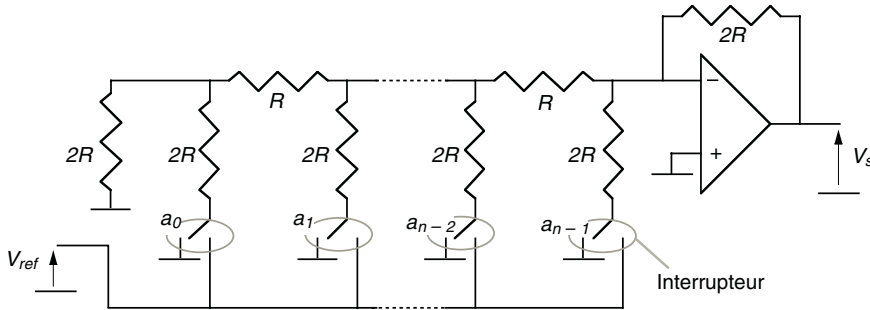


Figure 12.5. Convertisseur N/A à réseau en échelle R - $2R$.

Pour déterminer la tension V_s à la sortie de ce convertisseur, on utilise le théorème de Thévenin qui permet de calculer le circuit équivalent à deux sources de tension, avec résistance interne, branchées en série. Chaque interrupteur est considéré comme une source de tension de résistance interne nulle : $a_i V_{ref}$ ($a_i = 1$ ou 0). La figure 12.6a montre le résultat obtenu en considérant la première cellule. La figure 12.6b montre le résultat obtenu en utilisant le calcul précédent et la branche suivante.

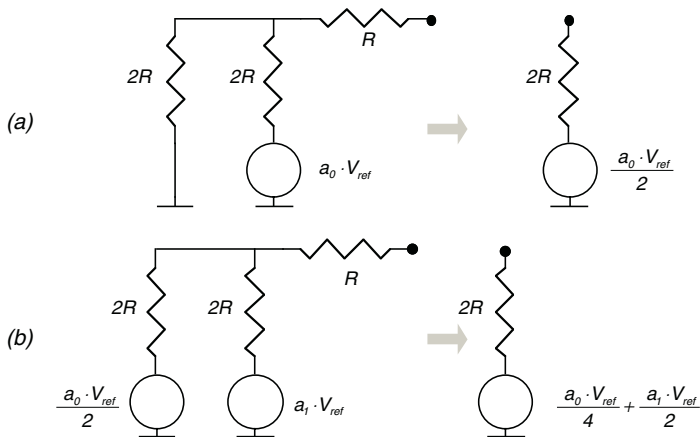


Figure 12.6. Principe du calcul de V_s pour le CNA de la figure 12.5.

Cette méthode, utilisée par récurrence, conduit au résultat recherché :

$$V = \frac{V_{ref}}{2^{n-1}} \cdot (a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0)$$

Ce principe de réalisation d'un CNA est celui utilisé pour la plupart des CNA aussi bien en technologie hybride qu'intégrée.

12.2.4 Caractéristiques principales des CNA

Les principales caractéristiques des convertisseurs N/A sont :

- nombre de bits : n ;
- quantum de conversion : $q = -V_{\text{ref}}/2^{n-1}$.

En plus de ces deux paramètres de base, nous avons cinq autres paramètres importants : valeur maximale, résolution, temps de conversion et les tensions de sortie et d'entrée.

a) Valeur maximale de la tension de sortie

La valeur maximale de la tension de sortie est donnée par :

$$V_{s, \text{max}} = 2 \cdot V_{\text{ref}} \cdot \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] \quad \text{ou} \quad V_{s, \text{max}} = 2 \cdot V_{\text{ref}} \quad (n \text{ grand})$$

b) Résolution

La résolution r d'un système est la plus petite valeur, ou incrément minimum, que ce système peut délivrer, ramenée à la valeur maximale. Soit pour un convertisseur N/A de n bits (tableau 12.1, page ci-contre) :

$$r = \frac{1}{2^n - 1} \quad \text{ou} \quad r \approx \frac{1}{2^n} \quad (n \text{ grand})$$

c) Temps de conversion ou temps d'établissement

Le temps de conversion (*settling time*) est le temps qui s'écoule entre l'instant où la commande de conversion est faite et l'instant où la tension de sortie atteint sa valeur finale et ne s'écarte pas de celle-ci de plus de $\pm 1/2$ quantum. Le cas le plus défavorable est le passage de la tension de sortie nulle à la tension de sortie pleine échelle (figure 12.7).

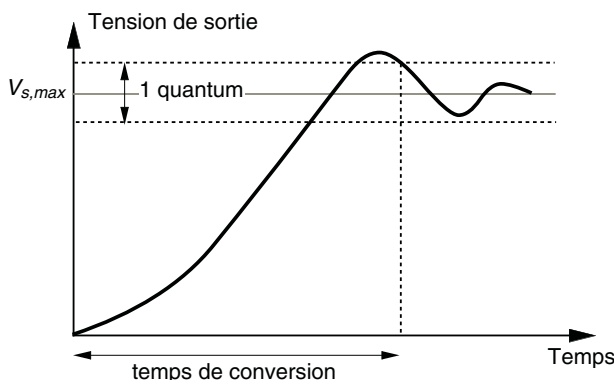


Figure 12.7. Temps de conversion d'un CNA.

Le temps de conversion T_{conv} d'un CNA est typiquement de l'ordre de quelques 100 ns, mais ce temps peut évoluer suivant le nombre de bits : pour un CNA 8 bits de l'ordre de 250 ns, mais pour un CNA de 18 bits le temps de conversion peut atteindre 250 μs .

TABEAU 12.1. Résolution des CNA en fonction de la longueur du nombre numérique.

Nombre de bits	r en $1/2^n$	r en décimal	r en %
4	1/16	0,0625	6,2
8	1/256	0,003906	0,4
10	1/1 024	0,009766	0,1
12	1/4 096	0,00024414	0,024
16	1/65 536	0,000015258	0,0015

d) Tension de sortie

La tension de sortie (*output*) peut être positive (V_s varie de 0 à $V_{s, \text{max}}$) : CNA *unipolaire* ou positive et négative (V_s varie entre $-V_{s, \text{max}}$ et $+V_{s, \text{max}}$) : CNA *bipolaire*.

e) Tension d'entrée

Les entrées du convertisseur (*input*) sont des entrées de circuits logiques qui peuvent être en technologie TTL ou CMOS. De plus, dans certains cas, les entrées peuvent être du type TTL 3 états pour être compatibles avec le bus de données du microprocesseur et se connecter directement sur le bus de données de l'ordinateur.

12.2.5 Erreurs sur la courbe de transfert d'un CNA

Les erreurs, qui provoquent une distorsion de la courbe de transfert théorique, sont dues essentiellement aux résistances (précision et stabilité en température), aux interrupteurs analogiques (résistance d'ouverture R_{off} non infinie, résistance de fermeture R_{on} non nulle, stabilité en température) et à l'amplificateur opérationnel (tension de décalage, gain...) mais aussi au fonctionnement en dynamique.

a) Erreur de décalage

L'erreur de décalage (*offset voltage*) consiste en une tension de sortie non nulle lorsque le code d'entrée est nul (figure 12.8, page suivante).

b) Erreur de gain ou erreur de facteur d'échelle

Cette erreur, souvent due à l'influence de la température, produit une variation proportionnelle de la tension de sortie par rapport à la tension théorique (figure 12.9, page suivante). Aussi il est important de vérifier la caractéristique du CNA au niveau de la variation relative de la pente de la courbe de transfert en fonction de la température, exprimée en ppm/°C (partie par million = 10^{-6}).

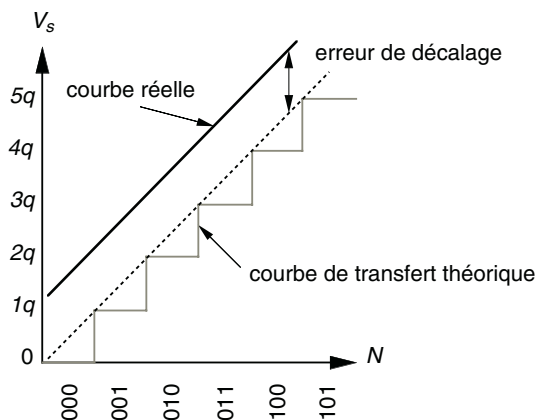


Figure 12.8. Erreur de décalage.

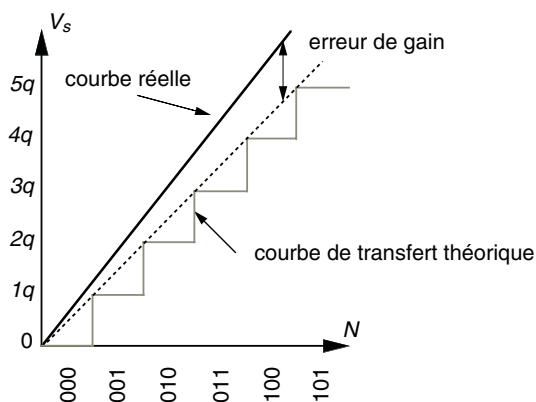


Figure 12.9. Erreur de gain.

c) Erreur de linéarité différentielle

Dans la caractéristique idéale d'un CNA, deux transitions successives produisent une variation de la tension de sortie de $\pm q$ (± 1 LSB). Dans la caractéristique réelle, la variation de sortie peut être plus petite ou plus grande que q . Cet écart définit la non-linéarité différentielle (*differential non linearity*) qui peut être exprimée en volts ou en LSB équivalent. Si la pente de la courbe réelle est toujours positive, la conversion est dite non linéaire mais *monotone* (figure 12.10, page ci-contre).

Si par contre un code numérique de valeur supérieure provoque la sortie d'une tension analogique moindre, il y a une *non monotonie* (figure 12.11, page ci-contre).

d) Erreur de commutation

Lorsque la commutation des bits d'entrée n'est pas assurée simultanément, la tension de sortie peut présenter une valeur transitoire erronée. Ainsi pour passer de 011 à 100, si le 1 passe à zéro avant que le zéro passe à 1, la tension de sortie passera par

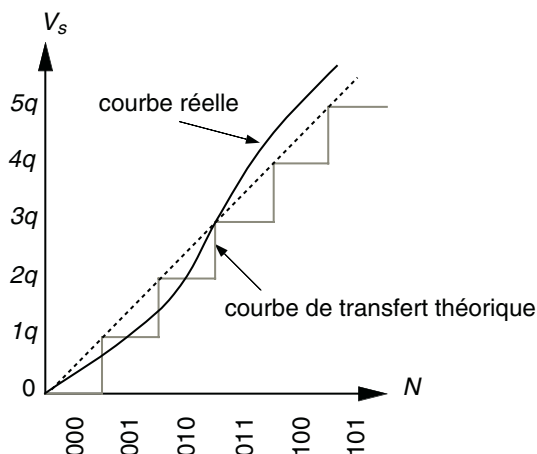


Figure 12.10. Erreur de linéarité monotone.

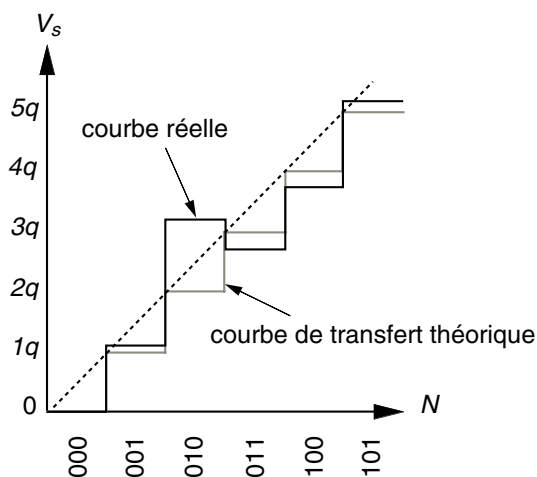


Figure 12.11. Erreur de non linéarité non monotone.

zéro ; dans le cas contraire, la tension de sortie correspondra de façon transitoire au code 111... (figure 12.12, page suivante).

Cette erreur transitoire est éliminée de façon interne pour des CNA possédant une mémoire analogique en sortie. Dans le cas de CNA très rapide ($T_{\text{conv.}} < 50 \text{ ns}$), le phénomène transitoire, ne pouvant être éliminé par mémorisation pour ne pas ralentir la conversion, est une caractéristique du CNA : par exemple il est indiqué dans la documentation que la durée des transitoires est toujours inférieure à 5 ns.

Certaines de ces erreurs peuvent être supprimées au moment de la mise en place du CNA par des réglages externes : réglage de la tension de décalage, réglage du gain... Les autres erreurs seront les caractéristiques du CNA et devront être prises en compte lors du choix de celui-ci : variation de la courbe de transfert en fonction de la température, protection contre les erreurs de commutation, etc.

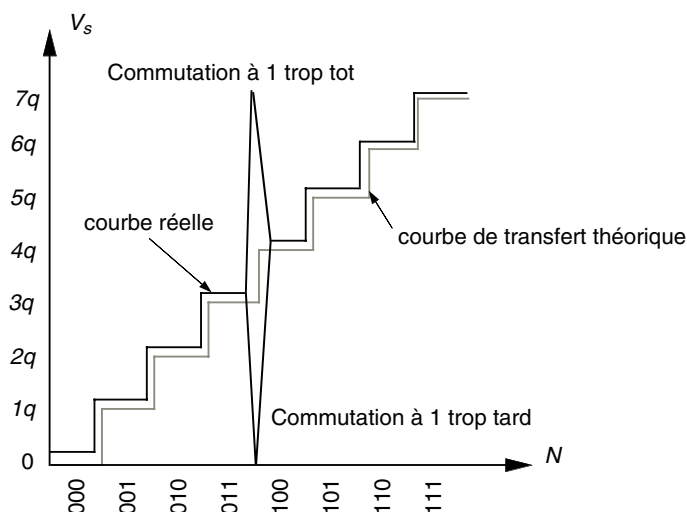


Figure 12.12. Erreur de commutation.

12.2.6 Quelques applications des convertisseurs N/A

Outre la commande de divers actionneurs ou récepteurs (moteurs, électrovannes...), les convertisseurs N/A peuvent être utilisés pour diverses applications que nous allons décrire.

a) Multiplieurs analogiques

Dans ce type d'applications, la tension de référence V_{ref} n'est plus considérée comme une source de tension constante, mais sa valeur peut varier. On a toujours la relation $V_s = k \cdot V_{\text{ref}} \cdot N$. La tension de sortie V_s se présente donc comme le produit d'un nombre binaire N qui peut être constant ou non et d'une tension variable V_{ref} . Cette multiplication hybride peut être utilisée par exemple pour réaliser des sources de tensions programmables, des amplificateurs à gain variable souvent intégrés dans des chaînes d'acquisition (chapitre 13), des déphaseurs à commande numérique ou des filtres analogiques programmables.

► Déphaseur à commande numérique

Cette application utilise deux CNA (figure 12.13, page ci-contre). Deux convertisseurs multiplieurs, dont les tensions de référence sont respectivement $E \cdot \sin(\Omega t)$ et $E \cdot \cos(\Omega t)$, délivrent les tensions de sortie $N_1 \sin \Omega t$ et $N_2 \cos \Omega t$. Si $N_1 = \cos \vartheta$ et $N_2 = \sin \vartheta$ et si les deux tensions de sortie sont additionnées, il vient :

$$V_s = -\sin(\Omega t + \vartheta) \quad \text{où } \vartheta \text{ est le déphasage contrôlé par } N_1 \text{ et } N_2$$

► Filtre analogique programmable

Une autre application très importante des convertisseurs N/A est la réalisation de filtre analogique dont les caractéristiques, en particulier la fréquence de coupure, sont modifiables par une commande numérique (roues codeuses ou ordinateurs).

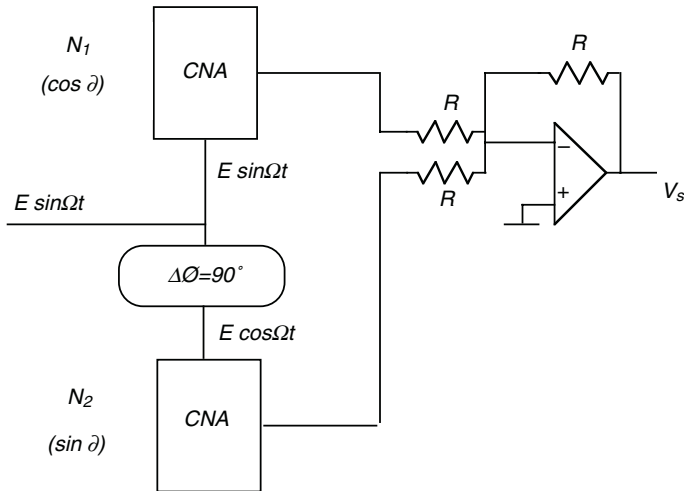


Figure 12.13. Réalisation d'un déphaseur à commande numérique.

Dans l'exemple de la figure 12.14, le filtre étudié est un filtre passe-bande étroit ou filtre sélecteur, centré sur une fréquence F_0 .

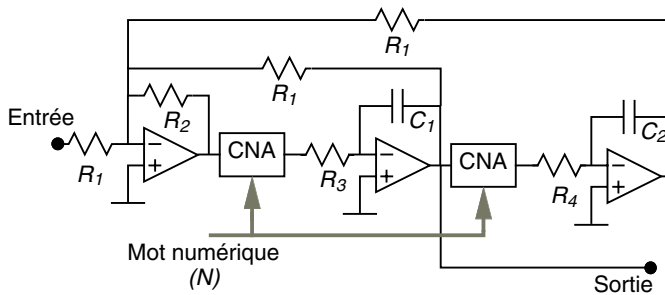


Figure 12.14. Réalisation d'un filtre analogique programmable.

La fonction de transfert est paramétrée par le mot numérique N en entrée des deux convertisseurs N/A utilisés :

$$H(p) = \frac{NR_2R_4C_2 \cdot p}{R_1R_3R_4C_1C_2 \cdot p^2 - NR_2R_4C_2 \cdot p + N^2R_2}$$

D'où la fréquence de coupure F_0 :

$$F_0 = \frac{N}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{R_2}{R_1R_3R_4C_1C_2}}$$

et le facteur de résonance Q :

$$Q = \sqrt{\frac{R_1R_3C_1}{R_2R_4C_2}}$$

Il est important de remarquer que le facteur de résonance ou de surtension est constant quelle que soit la fréquence F_0 . Ainsi, en considérant un convertisseur N/A de 10 bits et des valeurs des composants telles que $R_2 = R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $C_2 = C_1 = 1 \text{ nF}$, $R_3 \approx 80 \text{ k}\Omega$ et $R_4 \approx 3 \text{ k}\Omega$, nous avons la relation suivante :

$$F_0 = N 10^4 \text{ Hz} \quad \text{avec } F_0 \text{ de } 10 \text{ kHz à } 10 \text{ MHz}$$

Le filtre sélecteur ainsi obtenu permet de faire varier simplement la fréquence à partir d'un système numérique, soit la courbe de réponse représentée sur la figure 12.15.

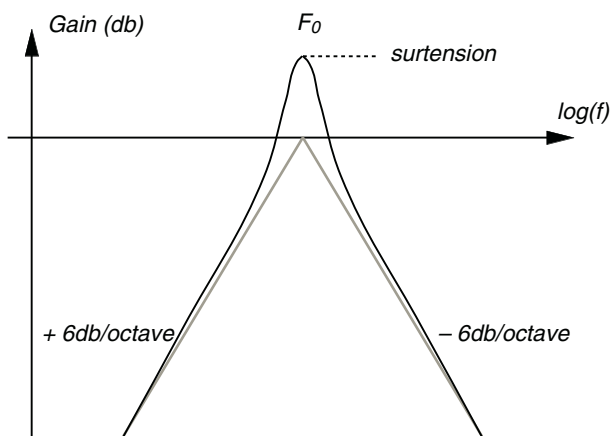


Figure 12.15. Courbe de réponse en fréquence du filtre représenté sur la figure 12.14.

b) Génération de fonctions analogiques

L'utilisation d'une mémoire morte ROM et d'un convertisseur N/A permet d'obtenir la génération de fonctions analogiques avec comme précision et stabilité celles d'un convertisseur N/A qui peuvent facilement être de l'ordre de 10^{-4} . Ce type de générateur est utilisé pour obtenir des fonctions rampe ou sinusoïdale de grande précision, ou encore spécifiques à une application (par exemple la simulation d'un signal d'électro-cardiogramme).

12.3 LA CONVERSION ANALOGIQUE NUMÉRIQUE

12.3.1 Introduction

Effectuer une conversion analogique-numérique (ou A/N), c'est rechercher une expression numérique dans un code déterminé, pour représenter une information analogique. Un convertisseur A/N est un dispositif qui reçoit un signal analogique et le transforme en un signal numérique (figure 12.16, page ci-contre). Soit la relation :

$$V_s = q \cdot (a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0)$$

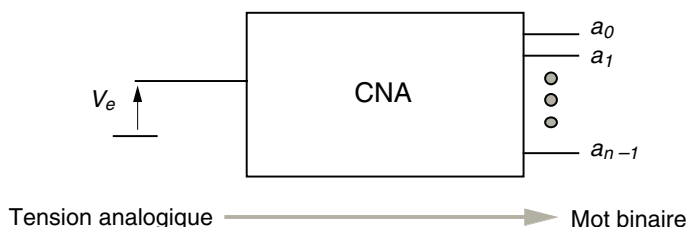


Figure 12.16. Convertisseur analogique-numérique.

La quantité q n'est plus une caractéristique du convertisseur. En effet, la tension d'entrée maximale $V_{e, \max}$ étant fixée, ainsi que le nombre de bits n , le quantum se déduit de la relation :

$$q = \frac{V_{e, \max}}{2^n - 1}$$

La courbe de transfert théorique, donnant la valeur numérique de sortie N en fonction de la tension analogique d'entrée V_e , est une courbe en escalier à laquelle on peut associer l'évolution de l'erreur de conversion ou *erreur de quantification* en dent de scie entre $-1/2q$ et $+1/2q$ (chapitre 7 et figure 12.17).

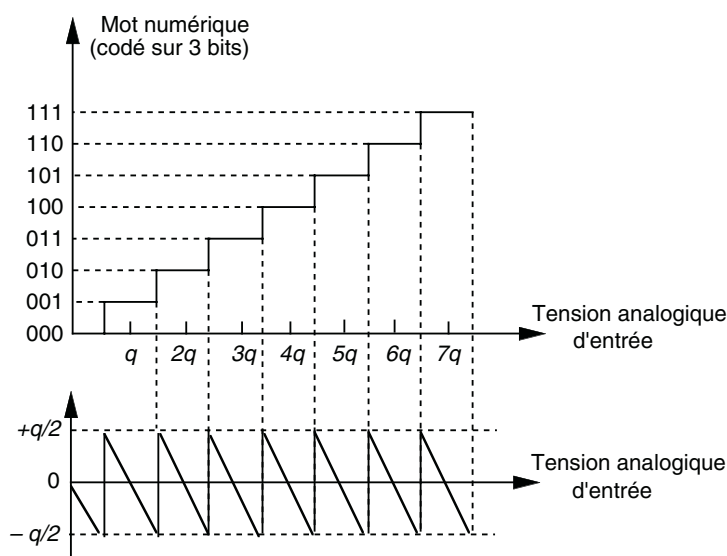


Figure 12.17. Courbe de transfert d'un convertisseur idéal et évolution de l'erreur de quantification associée.

En effet un mot numérique N pourra correspondre à une tension d'entrée V_e telle que :

$$N \cdot q - (1/2) \cdot q \leq V_e < N \cdot q + (1/2) \cdot q$$

Les diverses techniques utilisées pour réaliser des convertisseurs A/N permettent d'atteindre des caractéristiques différentes :

- précision : CAN à intégration ;
- économique et rapide : CAN utilisant des CNA ;
- très rapide : CAN parallèle.

12.3.2 CAN à intégration simple rampe

Un convertisseur simple rampe est basé sur le principe de la conversion tension en fréquence ou durée.

La figure 12.18 représente le schéma synoptique d'un convertisseur à intégration simple rampe. Le principe d'un tel convertisseur est le suivant : on charge linéairement un condensateur à l'aide d'un amplificateur opérationnel monté en intégrateur (tension V_1 sur la figure 12.18 et figure 12.19, page ci-contre) dont la tension d'entrée est constante et égale à $-V_{\text{ref}}$. Cette tension est appliquée à l'entrée d'un comparateur dont l'autre entrée reçoit la tension inconnue V_e à convertir ; lorsque la tension rampe V_1 arrive à égalité avec V_e , la sortie V_2 du comparateur bascule. Le temps écoulé entre le départ de la rampe t_0 , correspondant au début de conversion, et le basculement au temps t_1 est le résultat de la *conversion tension-durée*. En utilisant une horloge de référence de période ϑ (sortie V_3), la fonction logique « ET » entre les signaux horloge et le créneau de durée proportionnelle à V_e donne un nombre d'impulsions N tel que :

$$t_1 - t_0 = V_e \cdot \left(\frac{RC}{V_{\text{ref}}} \right) = N \cdot \vartheta$$

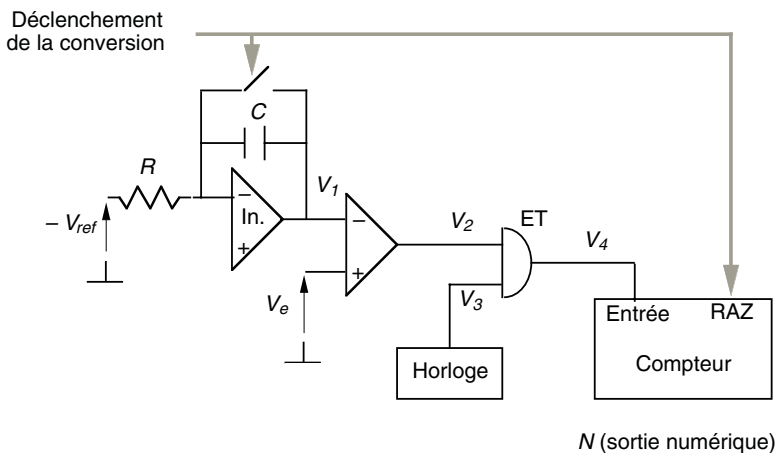


Figure 12.18. Convertisseur à intégration simple rampe.

Ce nombre d'impulsions est compté par un compteur binaire. On dispose ainsi, en sortie du compteur, d'un nombre binaire N proportionnel à V_e :

$$N = V_e \cdot \left(\frac{R \cdot C}{V_{\text{ref}} \cdot \vartheta} \right)$$

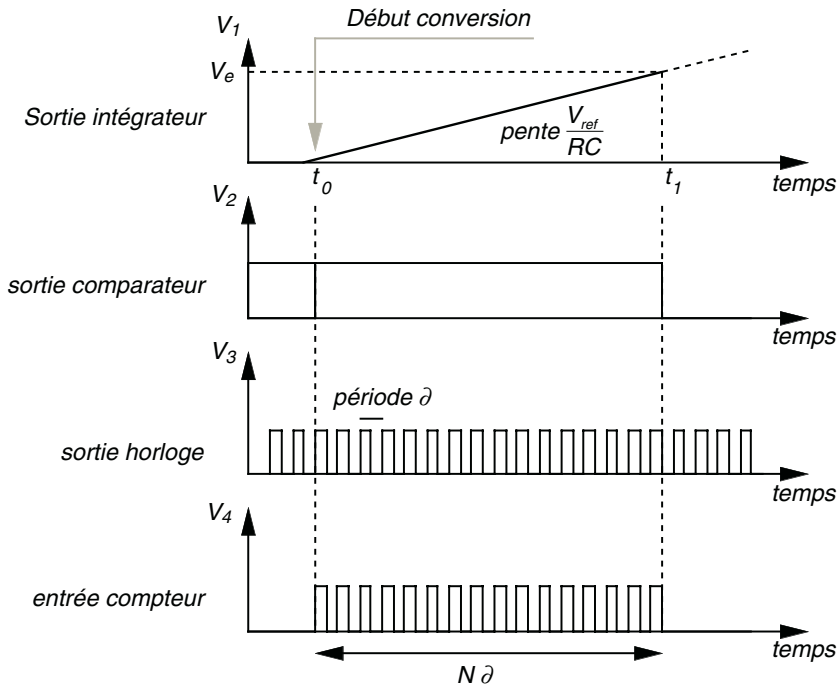


Figure 12.19. Diagramme des temps d'un convertisseur à intégration simple rampe.

Le temps de conversion sera donc directement proportionnel à la valeur $N\delta$. Pour un convertisseur 8 bits, la conversion de la tension maximale nécessitera de compter 255 impulsions. Par conséquent, avec une horloge de fréquence 1 Mhz, le temps de conversion sera de 255 μ s. Ce temps est relativement long et une première conclusion est que les convertisseurs à intégration sont lents. De plus les sources d'erreurs sont nombreuses puisque le coefficient de proportionnalité entre N et V_e contient des termes sensibles aux perturbations extérieures (bruit, température...). La linéarité de la charge du condensateur et la résolution du comparateur peuvent aussi introduire des erreurs. Ce type de convertisseurs, économiques mais peu précis et lents, est amélioré en utilisant une conversion double rampe.

12.3.3 CAN à intégration double rampe

Le convertisseur double rampe constitue un perfectionnement important du convertisseur simple rampe. En effet la précision devient indépendante des éléments pouvant varier : la capacité, la résistance et la fréquence de l'horloge. La conversion s'effectue ici en deux étapes, pilotées par une logique de contrôle qui commande deux interrupteurs (figures 12.20 et 12.21, page suivante).

La première étape consiste à appliquer la tension d'entrée $-V_e$ à mesurer à l'entrée de l'intégrateur pendant un intervalle de temps prédéterminé Δt_1 égal à N_1 périodes

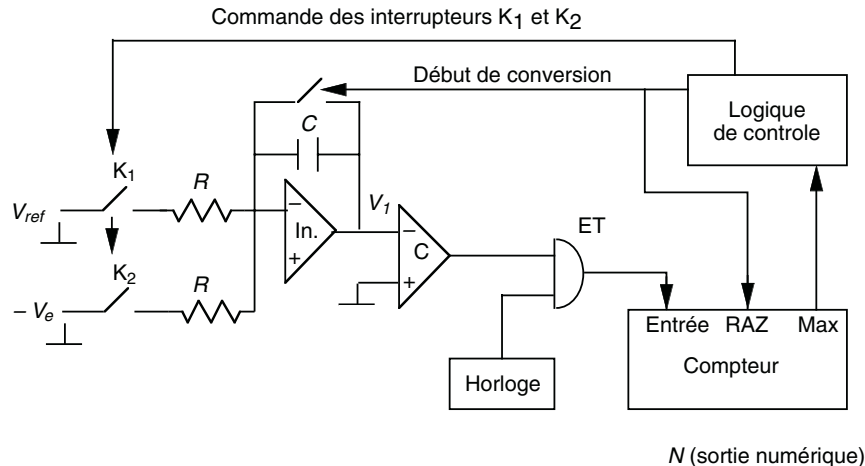


Figure 12.20. Convertisseur à intégration double rampe.

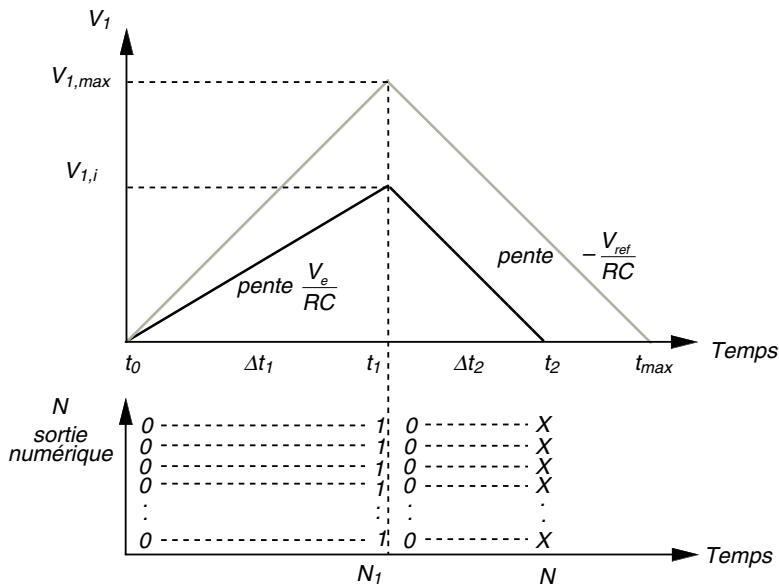


Figure 12.21. Croissance et décroissance de V_1 pendant les deux étapes de la conversion et sortie numérique correspondante.

d'horloge. À la fin de ce temps la tension de sortie V_1 de l'intégrateur est :

$$V_{1,i} = V_e \cdot \frac{\Delta t_1}{RC} = V_e \cdot \frac{N_1 \cdot \partial}{RC}$$

La deuxième étape consiste à commuter l'entrée de l'intégrateur sur une tension de référence V_{ref} de polarité opposée à V_e , de sorte que la tension V_1 décroît linéairement et le compteur est remis à zéro. Lors de cette décroissance, un comparateur détecte

le passage par zéro de V_1 et, à cet instant, arrête le comptage. Si N est le nombre emmagasiné dans le compteur, la durée de la décroissance est $N\vartheta$. Aussi on peut écrire :

$$V_{1,i} = V_{\text{ref}} \cdot \frac{N \cdot \vartheta}{RC}$$

En considérant les deux expressions de $V_{1,i}$, nous avons la relation entre N et V_e :

$$N = \frac{N_1 \cdot V_e}{V_{\text{ref}}}$$

La précision d'un tel convertisseur a été fortement augmentée puisque les sources d'erreurs, dues aux dérives des composants R , C et de la période ϑ , ont été éliminées. Par contre le temps de conversion a été augmenté dans un rapport 2.

La précision des convertisseurs à intégration peut encore être augmentée en ajoutant une étape de correction automatique du zéro de l'intégrateur (*CAN à intégration triple rampe* : figure 12.22a). La vitesse de conversion peut être aussi améliorée en effectuant la décharge avec deux pentes différentes (*CAN à intégration quadruple rampe* : figure 12.22b) : décharge rapide au début et lente à l'arrivée à zéro (rapport 100 sur les pentes par commutation de résistances).

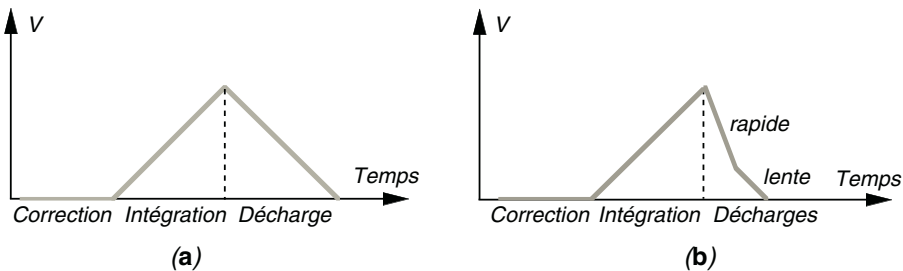


Figure 12.22. Principes des convertisseurs à intégration triple rampe (a) et quadruple rampe (b).

12.3.4 Convertisseur à comptage ou incrémental

Le convertisseur par comptage ou incrémental ne procède plus par une conversion analogique numérique, mais par conversion numérique-analogique dont le résultat est comparé à la tension inconnue d'entrée. Le schéma synoptique d'un tel convertisseur est donné sur la figure 12.23, page suivante. Nous pouvons remarquer qu'il intègre un composant de type convertisseur numérique-analogique (paragraphe 12.2).

Au départ de la conversion, le compteur binaire est remis à zéro (entrée RAZ). Ensuite, les impulsions d'horloge sont appliquées à l'entrée du compteur binaire dont les sorties numériques N sont reliées à un CNA. La tension de sortie V_{CNA} du CNA croît en marche d'escalier comme le montre la courbe de la figure 12.24, page suivante. Cette tension est comparée avec la tension à convertir V_e . À l'égalité des deux tensions, l'horloge est stoppée et la valeur fournie par le compteur binaire est transmise au registre de sortie.

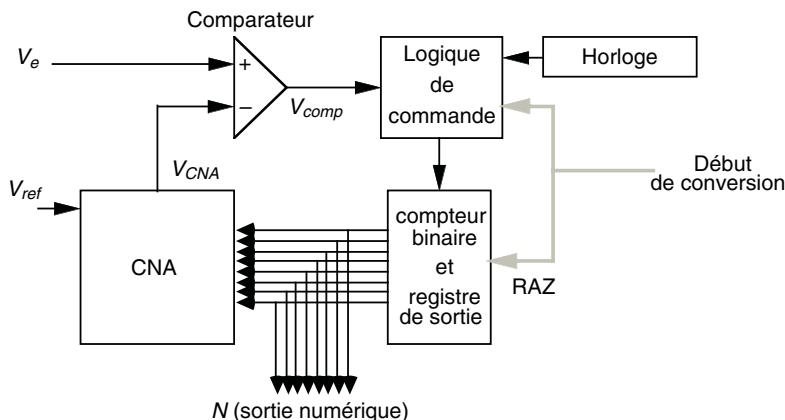


Figure 12.23. Convertisseur A/N par comptage ou incrémental.

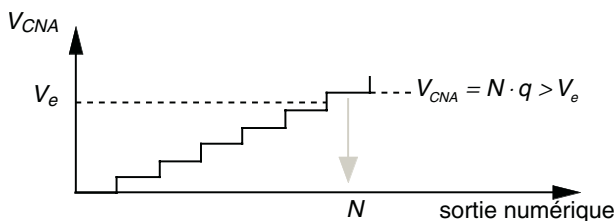


Figure 12.24. Principe de la conversion d'un CAN par comptage.

La précision est liée uniquement à celle du convertisseur numérique-analogique et donc en général très bonne. Par contre, le temps de conversion est fonction de la tension à convertir, comme pour les convertisseurs à intégration, et reste de l'ordre de grandeur des convertisseurs précédents.

12.3.5 Convertisseur à approximations successives

Contrairement au précédent convertisseur où toutes les combinaisons binaires sont testées par incrémentation bit à bit, le convertisseur va utiliser une logique de commande lui permettant de faire une recherche dichotomique dans l'ensemble des codes binaires. Le schéma synoptique de ce convertisseur, appelé aussi convertisseur à pesées successives, est représenté sur la figure 12.25, page ci-contre.

Le fonctionnement de ce convertisseur est illustré sur la figure 12.26, page ci-contre. La logique de commande va commuter tour à tour les poids binaires, en commençant par les poids forts, suivant la sortie du comparateur V_{comp} donnant le résultat de la comparaison entre V_e et V_{CNA} :

- si $V_e > V_{CNA}$ alors $V_{comp} = 1$ et le bit testé est forcé à 1 ;
- si $V_e < V_{CNA}$ alors $V_{comp} = 0$ et le bit testé est forcé à 0.

Cette méthode permet d'obtenir des temps de conversions identiques quelle que soit la tension à convertir (n commutations pour un convertisseur sur n bits) et surtout

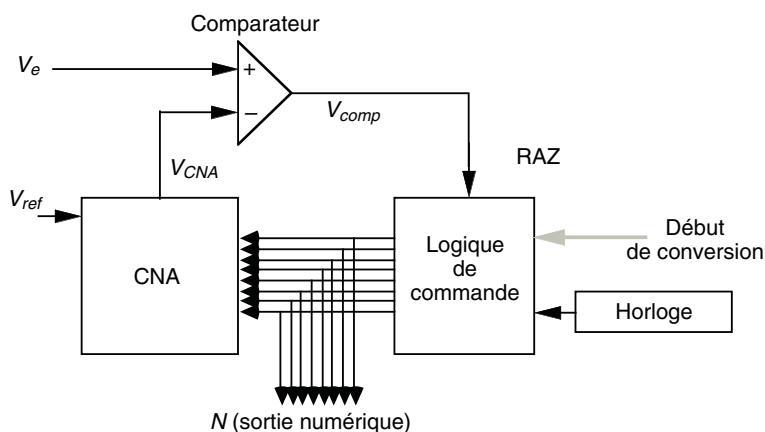


Figure 12.25. Convertisseur AN à approximations successives.

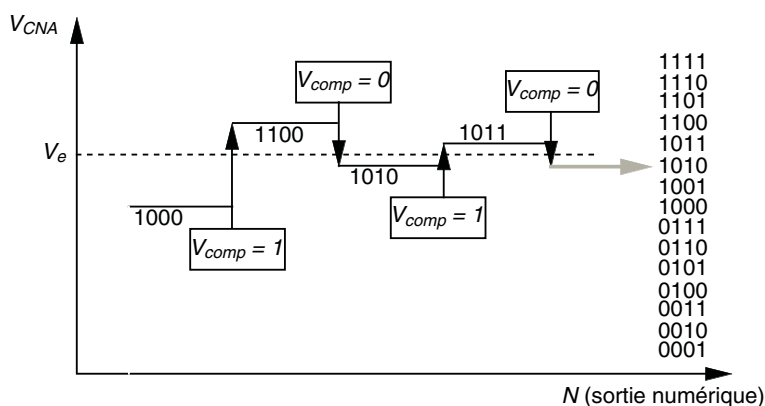


Figure 12.26. Diagramme des temps d'un convertisseur AN à approximations successives.

des temps de conversions très inférieurs aux précédents CAN, de l'ordre de quelques microsecondes. La précision de ce CAN est aussi liée à celle du CNA. Sa vitesse de conversion, sa simplicité de réalisation et sa précision en font un CAN très répandu. Mais le temps de conversion obtenu reste toujours supérieur ou comparable aux temps d'accès des calculateurs.

12.3.6 Convertisseur parallèle (*flash converter*)

C'est le type de conversion le plus rapide puisque tous les bits sont déterminés en même temps. Mais cette rapidité s'obtient au détriment du nombre de composants nécessaires lequel progresse en 2^n (figure 12.27, page suivante). La conversion parallèle consiste à faire $2^n - 1$ comparaisons simultanées, à l'aide de $2^n - 1$ comparateurs, pour détecter la valeur N parmi les 2^n possibilités qui est la plus proche de la tension analogique d'entrée V_e . Les 2^n valeurs analogiques sont élaborées à partir d'un réseau de résistances alimentées entre V_{ref} et zéro. On est donc conduit à comparer

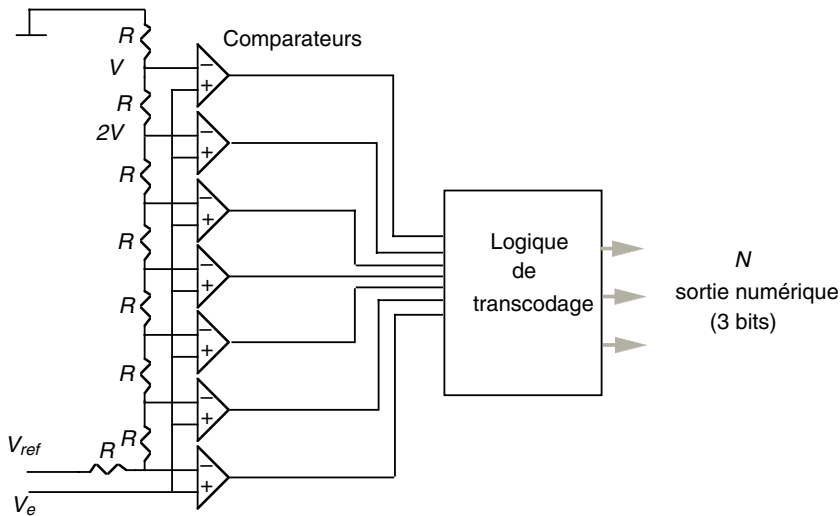


Figure 12.27. Structure d'un convertisseur parallèle sur 3 bits.

simultanément la tension analogique d'entrée aux valeurs étalons $V = (V_{\text{ref}}/2^n)i$ avec i variant de 1 à $2^n - 1$. Les résultats de ces comparaisons sont traités par une logique de décodage ou de transcodage, formée de portes logiques simples, pour donner le nombre binaire N .

Les temps de conversion, obtenus avec ce type de convertisseurs, sont de l'ordre de quelques dizaines de nanosecondes. Par contre la complexité de réalisation limite actuellement cette technique à des convertisseurs de 12 bits. Il est à noter que, étant donné les faibles temps de conversions, les sorties numériques sont parfois réalisées en technologie ECL, non compatible TTL, nécessitant une interface d'adaptation.

Comme dans le cas des CNA à résistances pondérées, la réalisation des CAN parallèles avec une résolution supérieure à 10 (1 023 comparateurs) étant très difficile, on préfère une structure avec plusieurs CAN parallèles de résolution plus faible, encore appelés convertisseurs à sous-gammes (figure 12.28, page ci-contre).

Ces convertisseurs à sous-gammes sont composés de deux CAN à n bits et d'un CNA à n bits pour former un CAN à $2n$ bits. Le principe consiste à réaliser une première conversion sur n bits (les bits de poids forts). Puis, la valeur résiduelle est amplifiée d'un facteur 2^n et convertit avec le deuxième convertisseur sur n bits (les bits de poids faibles).

Considérons l'exemple de la figure 12.28, page ci-contre, où l'on désire convertir une tension V_e en un nombre N sur 8 bits avec 2 convertisseurs analogique-numérique 4 bits, c'est-à-dire :

$$V_e = q \cdot N$$

soit

$$V_e = q \cdot (a_7 2^7 + a_6 2^6 + a_5 2^5 + a_4 2^4 + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2 + a_0)$$

ou

$$V_e = q \cdot (a_7 2^3 + a_6 2^2 + a_5 2 + a_4) \cdot 2^4 + (a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2 + a_0)$$

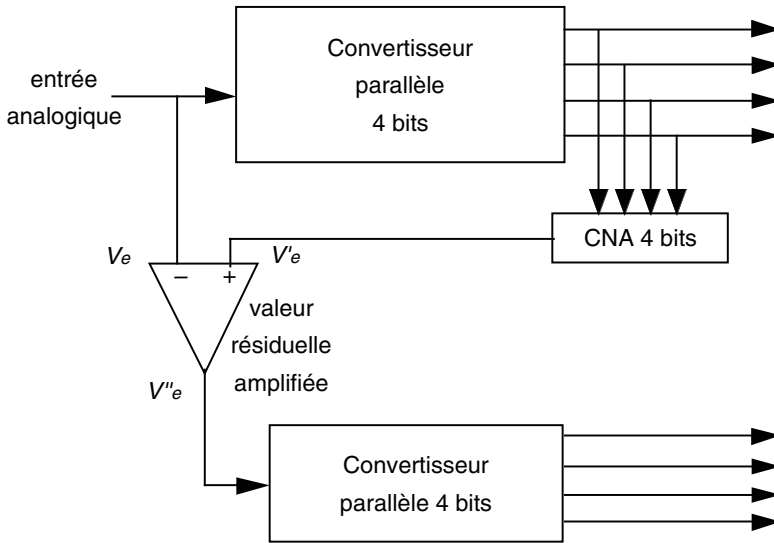


Figure 12.28. Structure d'un convertisseur à sous-gammes composé de deux convertisseurs parallèles à 4 bits et d'un convertisseur numérique-analogique de 4 bits.

La première conversion donne un nombre N' correspondant aux bits de poids forts et à la tension analogique V'_e :

$$V'_e = q \cdot (a_7 2^3 + a_6 2^2 + a_5 2 + a_4) = q \cdot N'$$

La tension résiduelle à convertir est amplifiée par un facteur 2^4 :

$$V''_e = (V_e - V'_e) \cdot 2^4$$

La conversion de cette tension correspond aux bits de poids faible, soit l'expression :

$$V''_e = q \cdot (a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2 + a_0) = q \cdot N''$$

L'association des nombres N' et N'' donne bien le nombre attendu N .

12.3.7 Convertisseur SIGMA-DELTA

Ce dernier type de convertisseur, appelé « Sigma-Delta » (Σ - Δ) ou « charge-balance » ou encore « à équilibrage de charges », est basé sur les deux principes du convertisseur tension-fréquence et du sur-échantillonnage. Ce CAN est composé de deux éléments (figure 12.29, page suivante) :

- Un modulateur du 1^{er} ordre : la sortie du modulateur (sortie du comparateur) représente une moyenne temporelle de la tension d'entrée écrite sous forme d'un mot numérique série (suite de bits) ;

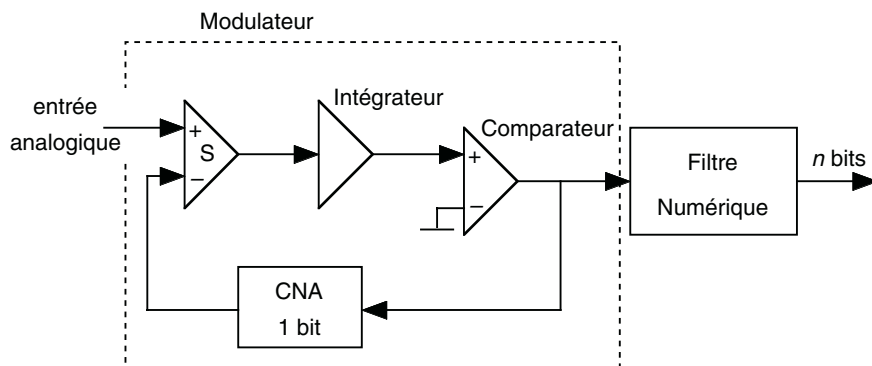


Figure 12.29. Structure d'un convertisseur Sigma-Delta avec ces deux éléments de base : le modulateur du 1^{er} ordre (à 1 bit) et le filtre numérique.

- Un filtre numérique : le filtre numérique utilisé est un filtre à réponse impulsionnelle finie qui permet d'obtenir un mot de n bits. À la place du classique compteur numérique (filtre moyenneur à coefficients identiques pour tous les bits) qui se place à la suite d'un convertisseur tension-fréquence, ce filtre a une pondération différente pour la suite temporelle des bits, conduisant ainsi à fournir plus rapidement (pas nécessaire d'attendre 2^n impulsions) une information plus précise.

Ainsi l'élément « modulateur » va produire une séquence de bit à une fréquence proportionnelle à la tension à convertir et beaucoup plus grande que la fréquence d'échantillonnage nécessaire. Ensuite au lieu d'utiliser un compteur, on cherche à calculer la valeur moyenne de la séquence de bits sortie, c'est-à-dire une intégration réalisée à l'aide d'un filtre numérique. La prise en compte du filtre (lecture de la sortie) est effectuée à une cadence plus faible que la fréquence du modulateur, dépendant de la précision désirée.

Une autre façon de comprendre le fonctionnement de ces convertisseurs Σ - Δ est de les analyser d'un point de vue fréquentiel. La résolution d'un CAN est directement liée à l'erreur de quantification ou bruit de quantification. Si on améliore le bruit de quantification d'un CAN, on augmente en même temps sa résolution. Ce principe est utilisé dans les CAN Σ - Δ ; en effet on utilise un CAN avec une faible résolution (modulateur Σ - Δ) qui est augmentée par diminution du bruit de quantification par un filtrage numérique.

12.3.8 Convertisseur A/N logarithmique

Un convertisseur A/N classique, avec une courbe de transfert linéaire, a une précision absolue constante tout au long de l'échelle de mesure ; par conséquent on obtient pour les tensions faibles des erreurs relatives très importantes (100 % pour $V_e \approx 1/2q$). Si l'on souhaite une précision relative constante, il faut intégrer une loi d'entrée-sortie logarithmique au CAN ; ainsi on augmente le nombre de codes possibles dans la zone de conversion des basses tensions, ce qui correspond à une diminution artificielle du quantum de conversion qui n'est plus constant sur toute la gamme de

conversion (figure 12.30). Ce genre de convertisseurs est utilisé par exemple pour la transmission et la réception numérique de la parole. Ces composants sont dits assurer une compression de la dynamique du signal.

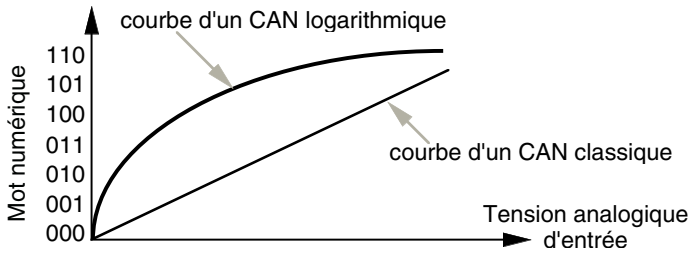


Figure 12.30. Courbe de transfert d'un CAN logarithmique.

12.3.9 Caractéristiques et erreurs des convertisseurs A/N

Les paramètres caractéristiques des CAN sont les mêmes que ceux des CNA, soit :

- nombre de bits : n ;
- quantum de conversion q ou valeur minimale de la tension d'entrée ;
- résolution : $r \approx 1/2^n$;
- temps de conversion ;
- caractéristiques électriques de la tension d'entrée et des sorties numériques.

De même les erreurs, provoquant des distorsions de la courbe de transfert théorique, sont identiques à celles d'un CNA à l'exception de l'erreur de commutation qui n'existe pas pour les CAN :

- erreur de décalage ;
- erreur de gain ;
- erreur de linéarité ;
- erreur différentielle de linéarité.

Les deux premières erreurs peuvent être corrigées par réglages extérieurs de composants discrets agissant sur l'offset ou le gain. Il ne faut pas oublier que la principale erreur introduite par les CAN est l'erreur de quantification ou bruit de quantification.

12.3.10 Applications des convertisseurs A/N

D'une façon générale, un convertisseur analogique-numérique est utilisé chaque fois que l'information disponible sous forme analogique doit subir une opération telle que :

- traitement numérique (FFT, corrélation, filtrage...) ;
- transmission numérique (transmission numérique de la parole par Modulation par Impulsion et Codage, MIC) ;
- visualisation numérique (affichage d'une tension dans le cas d'un voltmètre numérique) ;
- mémorisation numérique des signaux (signaux transitoires, signaux audio, signaux vidéo...).

Un exemple d'application très répandue est l'oscilloscope numérique (figure 12.31). L'association convertisseur analogique-numérique, mémoire et convertisseur numérique-analogique permet de disposer d'un oscilloscope avec des performances très accrues : mémorisation des phénomènes transitoires, traitement du signal enregistré... On cherche souvent à transformer un certain nombre de capteurs analogiques en capteur à sortie numérique en incorporant à l'intérieur de ce capteur un convertisseur A/N, c'est-à-dire que la fonction de conditionnement est intégrée directement dans le capteur.

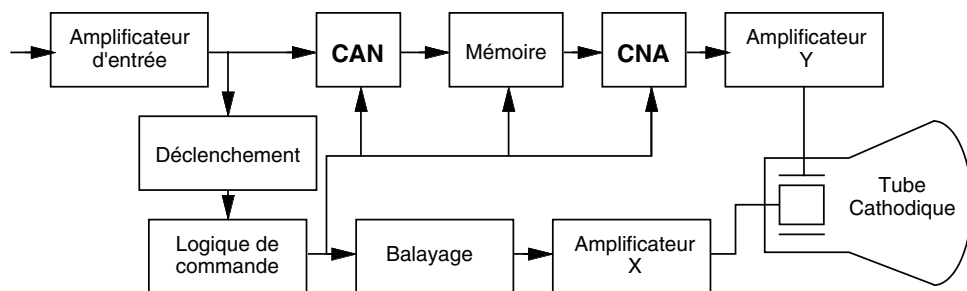


Figure 12.31. Architecture interne d'un oscilloscope numérique.

Étant donné la diminution constante des dimensions des composants (intégration) et des coûts des composants, les applications, utilisant des CAN, sont de plus en plus nombreuses. Selon les besoins des différentes applications (précision, rapidité, faible coût...), on choisit la structure du convertisseur A/N la plus adaptée (figure 12.32).

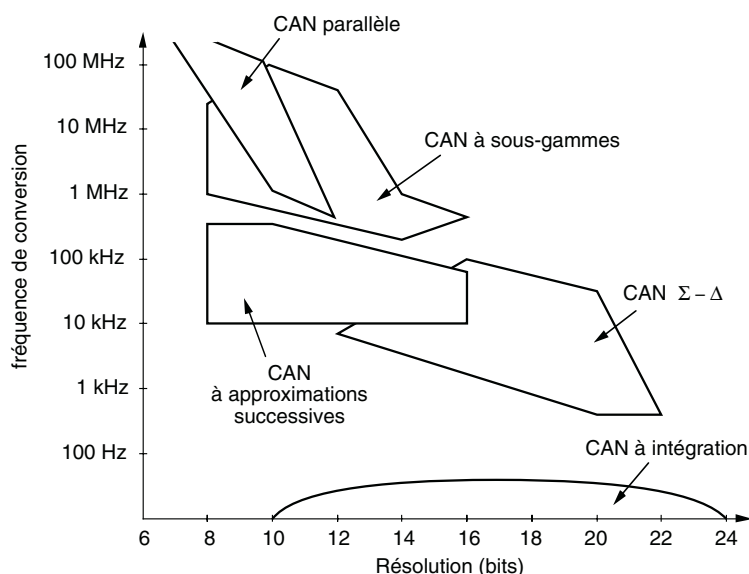


Figure 12.32. Domaines d'utilisation des différents types de CAN en fonction de la résolution (nombre de bits) et de la rapidité (fréquence d'échantillonnage ou fréquence d'acquisition des échantillons).

12.4 CARACTÉRISTIQUES TECHNIQUES DES CONVERTISSEURS

12.4.1 Caractéristiques techniques des CNA

Les principales caractéristiques techniques des CNA, reportées dans le tableau 12.2, sont classées selon des valeurs minimum, typiques et maximum.

TABLEAU 12.2. Caractéristiques techniques des CNA.

Caractéristiques	Min.	Typ.	Max.
nombre de bits	8	8/12	18
temps de conversion	10 ns	500 ns	250 μ s
sortie analogique	• unipolaire ou bipolaire • courant (5 mA) ou tension (5 V, 10 V)		
entrées numériques	TTL ou TTL 3 états		
alimentation	symétrique (–15 V, +15 V) ou unique (0V, 5V)		
puissance consommée	20 mW	200 mW	> 1 W
autre	compatible microprocesseur		

12.4.2 Caractéristiques techniques des CAN

Les principales caractéristiques techniques des CAN, reportées dans le tableau 12.3, sont classées selon des valeurs minimum, typiques et maximum.

TABLEAU 12.3. Caractéristiques techniques des CAN.

Caractéristiques	Min.	Typ.	Max.
nombre de bits	6	8/12	24
temps de conversion	10 ns	20 μ s	> 1 s
entrée analogique	• unipolaire (0 à 10 V ou 0 à 20 V) • bipolaire (± 5 V ou ± 10 V)		
sorties numériques	TTL, TTL 3 états ou ECL		
alimentation	• symétrique (–15 V, +15 V) ou unique (0V, 5V)		
puissance consommée	200 mW	400 mW	> 1 W
autre	compatible microprocesseur, sortie série		

12.4.3 Réalisation technologique des convertisseurs

Les convertisseurs sont le plus souvent réalisés sous forme de circuits intégrés classiques. Les résistances, qui demandent une grande précision, sont ajustées par sablage ou par usinage laser. Mais beaucoup de convertisseurs, possédant de nombreux composants discrets analogiques (capacités, résistances...), sont réalisés en technologie hybride, c'est-à-dire que le circuit complet est composé de circuits intégrés classiques (comparateur, compteur, amplificateur opérationnel...), mais sans boîtier,

et de composants discrets associés sur un circuit imprimé miniaturisé (technologie des couches épaisses).

12.5 ÉCHANTILLONNEUR/BLOQUEUR

12.5.1 Définition d'un échantillonneur/bloqueur

Nous avons étudié dans le paragraphe précédent, la structure des convertisseurs analogiques/numériques. Une hypothèse implicite a été faite : la tension d'entrée du convertisseur est constante. Étant donné la précision des CAN ($> 1\%$), on doit avoir une tension d'entrée du convertisseur qui est maintenue constante pendant le temps de la conversion avec des fluctuations du même ordre de grandeur $\approx 1\%$. Prenons l'exemple d'un signal sinusoïdal de fréquence $f = 2\text{ kHz}$ ($V = V_{\max} \sin 2\pi ft$), la vitesse de variation de la tension est maximale à $t = 0$:

$$\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{\max} = V_{\max} \cdot 2\pi f$$

Ainsi pour avoir un temps de maintien de l'ordre de 1% , il est nécessaire d'obtenir une temps de $1\text{ }\mu\text{s}$:

$$\frac{\Delta V}{V_{\max}} < 1\% \Rightarrow \Delta t \approx 1\text{ }\mu\text{s}$$

Ce calcul très simple montre qu'il est nécessaire d'utiliser un CAN très rapide (temps de conversion $< 1\text{ }\mu\text{s}$) pour réaliser le maintien de la tension constante lors de la conversion d'un signal de fréquence relativement basse (2 kHz). Aussi nous utiliserons un composant spécifique permettant de s'affranchir de ce problème : un échantillonneur-bloqueur. Le rôle de l'échantillonneur-bloqueur dans un système d'acquisition de données est donc de maintenir la tension à convertir constante pendant le temps de conversion. Ceci est indispensable pour des signaux à variations rapides par rapport au temps de conversion, si l'on veut obtenir une conversion significative. Il fonctionne suivant deux états (figure 12.33) :

- *Échantillonneur (Sample)* ou plus exactement *Suiveur*, pendant lequel il suit les variations instantanées du signal d'entrée ;

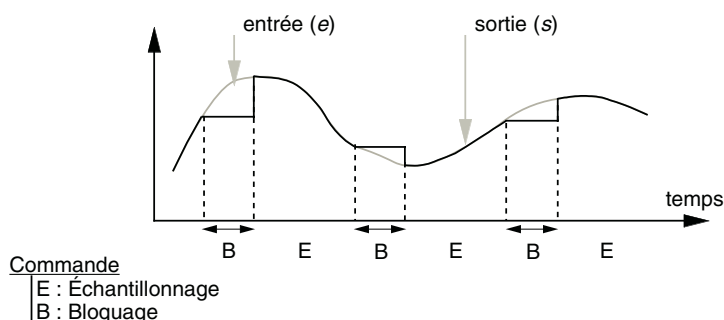


Figure 12.33. Représentation schématique de la tension de sortie d'un échantillonneur-bloqueur en fonction de la commande.

- *Bloqueur (Hold)* pendant lequel il conserve en mémoire la dernière valeur du signal analogique existant avant le passage en mode blocage.

Souvent, les durées d'échantillonnage sont très réduites vis-à-vis des durées de blocage.

Le circuit présente généralement un gain unitaire et n'est pas inverseur. La logique de commande de fonctionnement est souvent compatible TTL. Le schéma de principe d'un tel circuit (figure 12.34) se compose d'un interrupteur électronique (transistor MOS) qui réalise l'isolement de l'entrée e et de la sortie s lors du fonctionnement en bloqueur. Ensuite une capacité C permet de mémoriser la dernière tension présente à ses bornes ; sa valeur ne doit pas être trop grande pour réaliser correctement la fonction échantillonneur ou suiveur (constante de temps RC faible), mais suffisamment élevée pour maintenir la tension à ses bornes constantes pendant la conversion.

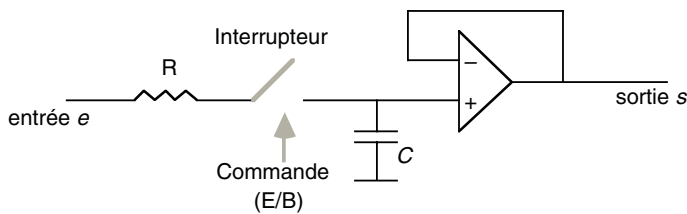


Figure 12.34. Schéma de principe d'un échantillonneur-bloqueur.

Pour améliorer ce dernier point, on utilise un amplificateur opérationnel en sortie pour augmenter la résistance de fuite du condensateur.

12.5.2 Caractéristiques d'un échantillonneur/bloqueur

Les caractéristiques d'un tel composant sont donc fonction des constituants internes. L'amplificateur opérationnel conduit à des erreurs de gain et de décalage de zéro (tension d'offset) qui sont supprimées par des réglages externes. L'impédance d'entrée est souvent très grande, supérieure à $100\text{ M}\Omega$, permettant ainsi de prélever la tension à convertir sans perturber le signal. Enfin, les caractéristiques les plus importantes sont les caractéristiques dynamiques (figure 12.35, page suivante) :

- *Vitesse de décroissance (Droop rate)* : pendant la phase « Bloqueur », la capacité de mémorisation se décharge très lentement : qq $10\text{ }\mu\text{V/ms}$;
- *Temps d'acquisition* : c'est le temps nécessaire pour avoir égalité entre la tension d'entrée et de sortie de l'échantillonneur/bloqueur. Ce temps va caractériser la fréquence maximale de fonctionnement du composant : qq 10 kHz à qq MHz ;
- *Temps d'ouverture (Aperture delay)* : ce temps exprime le retard effectif entre la fin de la phase d'acquisition et de début de maintien. C'est en fait le temps de commutation des interrupteurs commandés (qq 10 ns) ;
- *Transparence* : l'interrupteur n'étant jamais parfait, un couplage s'établit entre l'entrée et la sortie. Il apparaît alors, sur celle-ci, une composante résiduelle qui reproduit les variations de l'entrée.

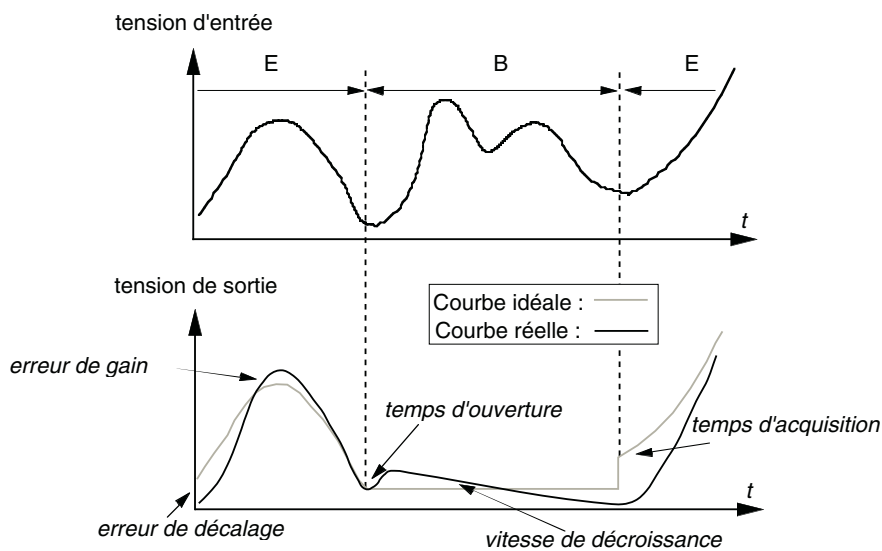


Figure 12.35. Erreurs d'un échantillonneur/bloqueur réel.

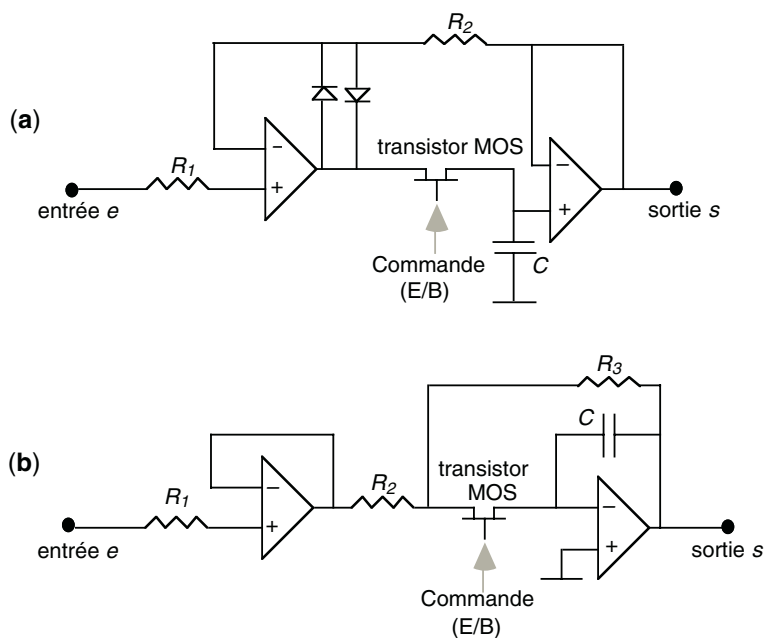


Figure 12.36. Deux structures typiques d'un échantillonneur/bloqueur.

La recherche de ces deux qualités contradictoires (précision et vitesse), que doit posséder un échantillonneur/bloqueur, préside à la conception de sa structure interne.

12.5.3 Structure interne d'un échantillonneur/bloqueur

Le schéma complet d'un échantillonneur/bloqueur est réalisé à partir de deux amplificateurs opérationnels. Le premier amplificateur, mis en entrée, permet ainsi de disposer d'une grande impédance d'entrée. La capacité C , composant externe au circuit, est fermée sur l'impédance d'entrée du deuxième amplificateur opérationnel pendant la phase de mémorisation.

Deux types de schémas, conduisant à des caractéristiques équivalentes, sont couramment utilisés (figures 12.36a et 12.36b, page ci-contre).

Le premier schéma consiste à réaliser une contre-réaction entre l'entrée et la sortie pour diminuer le temps d'acquisition et éviter d'ajouter les erreurs de décalages mises en cascade. Pendant la phase de blocage, le premier amplificateur est en saturation et, lors du retour en phase d'échantillonnage, le temps d'acquisition est alors augmenté. Pour améliorer cette transition, deux diodes, montées tête-bêche, permettent d'éviter la saturation de l'amplificateur.

Le second schéma utilise le deuxième amplificateur monté en intégrateur. De même pour éviter la saturation du premier amplificateur, on monte une résistance R_3 qui permet de maintenir la sortie du premier amplificateur au voisinage de e .

Chapitre 13

La mise en œuvre d'une chaîne d'acquisition de données

13.1 INTRODUCTION

La plus grande difficulté de mise en œuvre d'une chaîne d'acquisition de données est de réaliser l'adéquation la plus parfaite possible entre les caractéristiques des données du procédé externe et les éléments de la chaîne d'instrumentation. Cette adéquation doit être réalisée selon différents critères :

- obtenir des données numériques les plus proches possible des données réelles ;
- minimiser le coût de cette réalisation ;
- posséder un matériel standard pour répondre à l'évolutivité et à la réutilisabilité.

Aussi la démarche du choix d'une chaîne d'acquisition de données doit suivre une méthodologie aussi précise que possible ayant comme objectifs la détermination des paramètres importants de son application et le choix parmi des matériels existants correspondant à cette application.

Avant de présenter cette méthodologie, il est nécessaire de décrire des fonctions supplémentaires utilisées sur les cartes d'entrées/sorties :

- multiplexage ;
- amplification variable ou programmable ;
- temporisation ou comptage ;
- relation normalisée avec le micro-ordinateur : bus.

13.2 FONCTIONS SUPPLÉMENTAIRES

13.2.1 Multiplexage

Si l'on veut réaliser l'acquisition de plusieurs signaux analogiques différents, il serait très coûteux d'avoir autant de voies d'acquisition (échantillonneur/bloqueur, CAN) que de signaux à acquérir. Aussi il est possible d'utiliser des circuits appelés « multiplexeurs analogiques » permettant d'aiguiller une entrée parmi toutes les entrées vers le système de conversion. Si la vitesse d'acquisition reste basse et si l'on commute de l'ordre de la dizaine de voies par seconde, on pourra se contenter de multiplexeurs mécaniques, par exemple des relais à lames souples. Pour des vitesses supérieures, les multiplexeurs seront des multiplexeurs électroniques composés de réseaux de transistors MOS (figure 13.1).

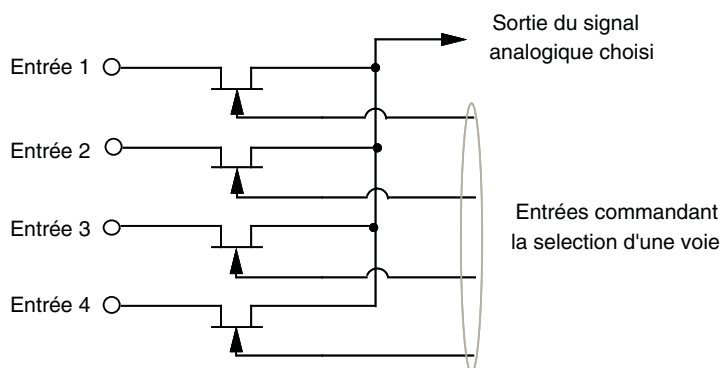


Figure 13.1. Schéma de principe d'un multiplexeur analogique.

Cette structure simplifiée montre l'importance des caractéristiques des transistors utilisés, en particulier en ce qui concerne la résistance en position circuit ouvert R_{off} qui doit être très grande pour éviter l'interaction des voies (diaphonie) et la résistance en position fermée R_{on} qui doit être faible pour transmettre correctement le signal d'entrée : $V_{sortie} = V_{entrée}$ (figure 13.2).

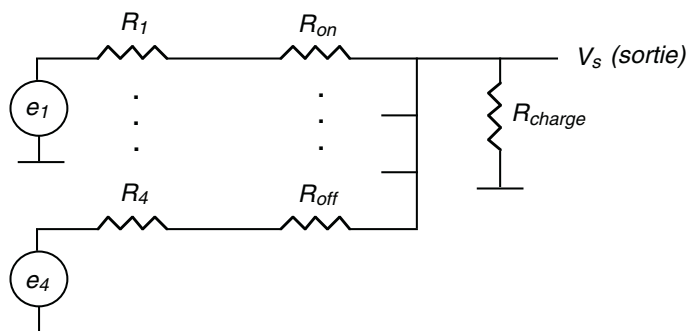


Figure 13.2. Schéma équivalent d'un multiplexeur analogique lorsqu'il transmet la voie e_1 .

Les voies d'entrées étant considérées comme des sources de tension non idéales (e_i et R_i), la tension de sortie V_s s'exprime en fonction de la tension de la voie commutée (e_1) par :

$$\frac{V_s}{e_1} = \frac{R_{\text{charge}}}{R_1 + R_{\text{on}} + R_{\text{charge}}}$$

où R_{charge} est l'impédance du circuit suivant le multiplexeur.

Pour avoir un rapport le plus proche possible de 1, il faut donc avoir une résistance de charge importante. Or le circuit suivant le multiplexeur est en général l'échantillonneur/bloqueur qui, comme nous l'avons vu, a une très grande impédance d'entrée. Cette condition étant remplie, les valeurs de R_{on} et de R_1 doivent être les plus faibles possible : transistors MOS de très grande qualité et capteurs proches de la source de tension idéale.

Les commandes des voies (4 à 16 voies) se font en général par un décodeur logique du type 1 parmi n . Ainsi pour un multiplexeur 4 voies, 2 entrées de commande, correspondant aux combinaisons 00, 01, 10, 11, suffisent, 3 entrées pour 8 voies et 4 entrées pour 16 voies. Ces entrées de commande sont de type logique TTL et donc directement accessibles par le système informatique.

La figure 13.3 représente la structure interne d'un composant multiplexeur complet.

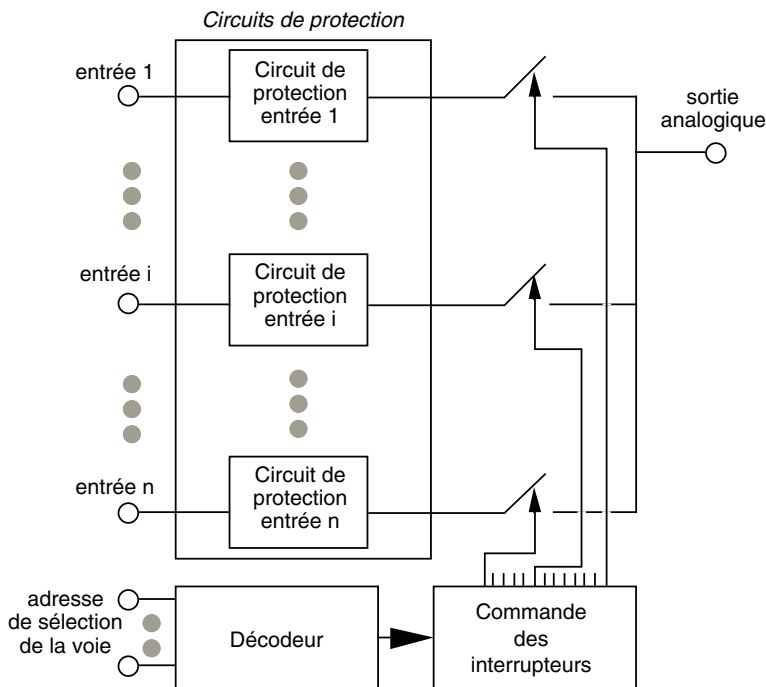


Figure 13.3. Structure interne d'un multiplexeur.

Il est important de remarquer que les circuits électroniques réalisant cette fonction de multiplexage sont les premiers éléments de la chaîne d'acquisition et donc en

contact direct avec l'extérieur. Aussi ils possèdent généralement une fonction de protection intégrée (chapitre 11). Cette fonction de protection est limitée à une protection en tensions minimale et maximale : de ± 20 V ou 30 V. Elle n'assure pas en général la protection contre les surtensions élevées.

Les principales caractéristiques techniques des multiplexeurs sont les suivantes :

- précision du transfert (rapport V_s/V_e) ;
- diaphonie entre les voies ;
- protection des voies en entrée ;
- vitesse de commutation (temps d'ouverture et temps de fermeture).

13.2.2 Amplification programmable

Comme nous l'avons vu dans le précédent chapitre, la conversion analogique-numérique a une erreur absolue de quantification correspondant au quantum de conversion q . Aussi l'erreur relative commise sur la conversion va être d'autant plus faible que la tension à convertir V_e est grande, proche du maximum $V_{\max} \approx 2^n q$. En effet la tension convertie correspondant à un nombre N ($V_e \approx Nq$), l'erreur ε s'exprime par :

$$e = \frac{q}{Nq} = \frac{1}{N} \quad \text{pour } N \text{ compris entre } 1 \text{ et } 2^n$$

Aussi, connaissant les variations des tensions du capteur utilisé, le but est d'adapter la plage de variation en tension de ce point de mesure à un domaine proche de la tension maximale sans introduire pour cela de saturation.

Ainsi, par exemple, désirant faire l'acquisition d'un signal provenant d'un capteur de température de type thermocouple (tension de quelques dizaines de millivolts), il est très intéressant de pouvoir réaliser une amplification avant conversion avec un gain d'environ 100. Nous obtenons alors, pour une plage de variation de la tension issue du capteur variant entre 5 mV et 15 mV, une plage de variation à la sortie de l'amplificateur à gain programmable variant entre 0,5 V et 1,5 V.

On parle d'amplification programmable dans le sens où l'utilisateur de la carte d'acquisition de données peut choisir pour une voie considérée l'amplification associée. Les cartes offrent à l'utilisateur un ensemble de gains qui dépend beaucoup du domaine d'utilisation de la carte. Ainsi Les groupes de gains les plus courants sont les suivants :

- 1, 2, 4, 8 ;
- 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 ;
- 1, 10, 100, 500.

L'architecture interne d'un tel composant est très simple puisqu'elle fait simplement appel à un amplificateur opérationnel dont la résistance de contre-réaction peut être choisie ou sélectionnée par programme en activant un multiplexeur analogique (figure 13.4, page ci-contre). L'exemple présenté correspond à un amplificateur programmable à 4 gains (1, 2, 4, 8) dont la commande est réalisée par deux signaux numériques.

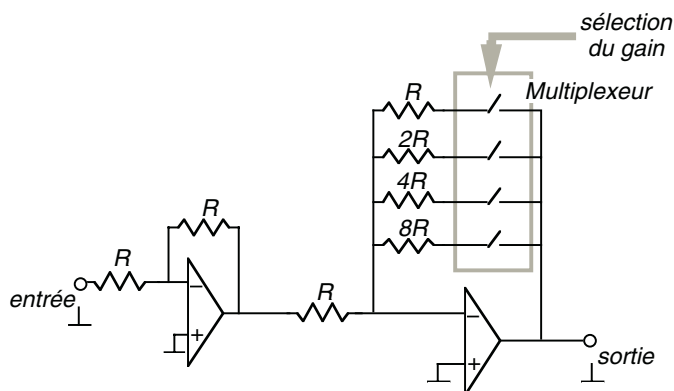


Figure 13.4. Structure interne d'un amplificateur à gain programmable.

Il est très important de noter que cette amplification programmable, qui est disponible sur certaines cartes d'acquisition de données, ne présente pas les qualités d'un amplificateur dit de mesure. En effet ces amplificateurs de mesure, qui se situent généralement au niveau du conditionnement des signaux, possèdent des caractéristiques de gain, de bande passante et de réjection de mode commun qui permettent d'obtenir des gains plus importants tout en conservant une très bonne qualité du signal.

13.2.3 Temporisation ou comptage

Les cartes d'entrées/sorties peuvent avoir des circuits appelés compteur/temporisateur (*Counter/Timer*). Ces circuits possèdent des registres de 16 ou 32 bits qui peuvent être incrémentés ou décrémentés à une cadence d'horloge programmable, par exemple dans le domaine de 1 μ s à 10 ms (figure 13.5). Ces circuits peuvent être utilisés de façon interne à la carte pour piloter les circuits de cette carte, en particulier ceux liés aux entrées/sorties comme par exemple la fréquence d'échantillonnage du convertisseur analogique-numérique.

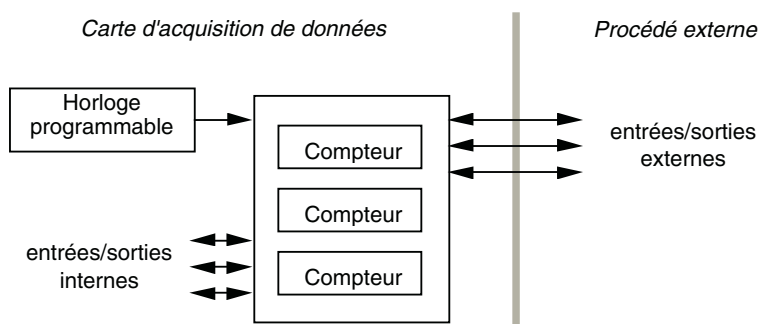


Figure 13.5. Description schématique de l'interconnexion des circuits compteurs au niveau de la carte d'acquisition de données.

Mais ces circuits peuvent aussi être utilisés de manière indépendante pour des fonctionnalités internes ou pour des entrées/sorties programmées temporellement. Ainsi les cartes disposent de connections spécifiques aux entrées/sorties de ces circuits.

La principale fonctionnalité interne indépendante est l'utilisation d'un compteur selon les deux cas suivants :

- Incrémentation : mesure d'un temps ;
- Décrémention : déclenchement d'une action après un délai fixé ou terminaison d'une action avant un délai maximum (cas du « chien de garde » ou *watchdog*).

Les fonctionnalités de ces circuits, liées à des entrées/sorties externes, sont nombreuses :

- Comptage du nombre d'occurrences d'un événement (front montant ou descendant d'un signal numérique) ;
- Mesure de la durée d'une impulsion (du front montant au front descendant ou l'inverse). Cette fonction est souvent désignée comme une fonction de fréquence-mètre ;
- Génération de signaux de type carré (rapport cyclique égal à 1) ou de type impulsif (rapport cyclique différent de 1).

Il est important de remarquer que ces diverses fonctionnalités sont généralement disponibles à l'aide de programmes complets de gestion de ces circuits fournis avec la carte.

13.2.4 Bus

La carte d'acquisition ou restitution de données va s'insérer dans le bus utilisé par le micro-ordinateur pour communiquer avec les périphériques enfichables. Il suffit donc de choisir la carte correspondant au type de bus ou à l'un des types de bus disponibles dans votre micro-ordinateur.

Afin de pouvoir identifier ce bus par son nom et ses caractéristiques de base, nous allons décrire les principaux types de bus :

- *bus XT* (1981) : ce bus de 8 bits a été utilisé sur les premiers micro-ordinateurs IBM PC/XT. La fréquence d'horloge est de 8,33 MHz ;
- *bus AT* ou *ISA* (1985) : ce bus de 16 bits, version suivante du bus XT, est utilisé dans les versions anciennes des compatibles IBM PC basés sur les processeurs 286 et 386. Cependant le bus AT peut aussi être disponible sur les versions 486. La fréquence d'horloge est de 8,33 MHz ;
- *bus EISA* (1988) : ce bus est une extension du bus AT et est utilisé sur les machines à base de 486. La fréquence d'horloge est de 8,33 MHz ;
- *bus Nubus* (1987) : Ce bus de 32 bits est essentiellement implanté dans les machines de la gamme Apple. La fréquence d'horloge était de 10 MHz dans la première version ; elle est montée à 20 MHz dans la version de 1993 ;
- *bus NEC* : ce bus de 16 bits est spécifique des machines japonaises du constructeur NEC.
- *bus PCI* (Peripheral Component Interconnect, 1991).

Le bus PCI est actuellement le plus utilisé dans le domaine de l'interfaçage avec des cartes d'entrées/sorties. Les principales caractéristiques de ce bus sont :

- l'adresse est codée sur 32 bits ;
- le bus PCI s'implémente sur 32 lignes multiplexées d'adresses et de données avec une extension possible à 64 lignes ;
- la fréquence d'horloge de base est fixée à 33 MHz avec une extension à 66 MHz. Une nouvelle extension du standard du bus PCI doit porter la fréquence d'horloge à 133 MHz (1998) ;
- le fonctionnement du bus est de type synchrone avec un émetteur « maître » et un récepteur « esclave ».

Ce bus correspond à la demande actuelle en terme de vitesse de transfert puisqu'il atteint dans sa version de base (32 bits et 33 MHz) une vitesse de 132 Moctets/s.

13.3 CARACTÉRISTIQUES GÉNÉRALES DES CARTES D'ENTRÉES/SORTIES

13.3.1 Architectures matérielles des cartes d'acquisition de données analogiques

Selon les performances temporelles désirées et le coût minimum souhaité pour une fonction d'acquisition de données analogiques, trois architectures matérielles sont possibles. Ces différentes architectures matérielles reposent sur le fait que le canal d'acquisition de données analogiques peut être multiplexé à différents niveaux.

a) Multiplexage des sorties des convertisseurs

Dans ce cas le multiplexage est de type numérique (circuit logique) et s'effectue en fin de chaîne (figure 13.6). Les principaux avantages sont :

- les CAN peuvent avoir un temps de conversion long puisque chaque canal possède son convertisseur ;

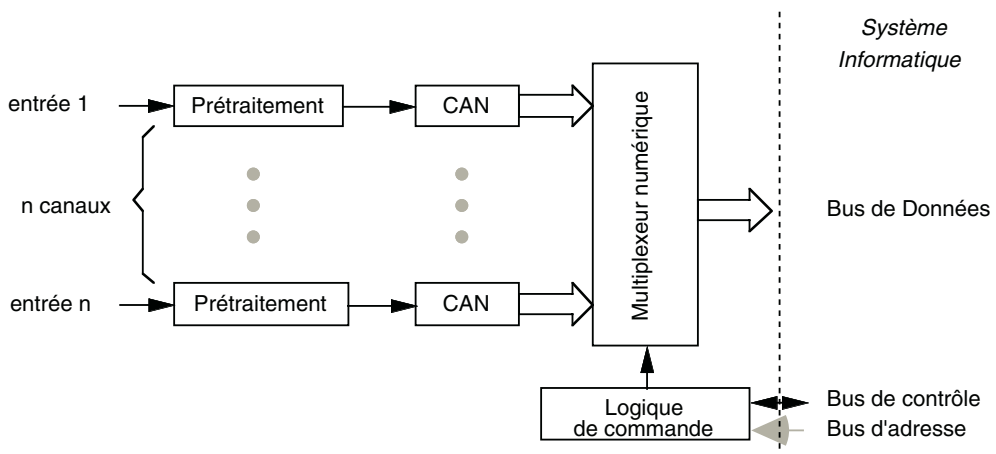


Figure 13.6. Chaîne d'acquisition avec multiplexage logique des sorties des CAN.

- pour des signaux d'entrées à variation lente, on peut éviter l'emploi de l'échantillonneur/bloqueur ;
- pour des capteurs placés en ambiance bruitée, les CAN peuvent être placés près du capteur et la transmission de l'information est alors réalisée sous forme numérique sur une longue distance (transmission série par fibre optique) en s'affranchissant des parasites ;
- si les signaux des différents canaux ont des variations très différentes (qq Hz à qq MHz), ce type de configuration permet d'adapter au mieux la chaîne de conversion à une entrée donnée (CAN à rampes pour une grande précision ou CAN parallèle pour une vitesse d'acquisition élevée).

L'inconvénient majeur est le coût élevé dû au nombre important de composants.

b) Multiplexage des sorties des échantillonneurs/bloqueurs

Dans ce cas le multiplexage est de type analogique et s'effectue juste avant la conversion analogique numérique (figure 13.7). Les principaux avantages sont :

- par rapport à la configuration précédente, l'utilisation d'un seul CAN permet de réduire de façon importante le coût ;
- l'utilisation d'un échantillonneur sur chaque entrée permet soit d'optimiser le temps d'acquisition (échantillonnage d'une voie pendant la conversion d'une autre voie), soit de réaliser un échantillonnage rigoureusement synchrone de n voies (possibilité très importante pour le traitement du signal : corrélation...).

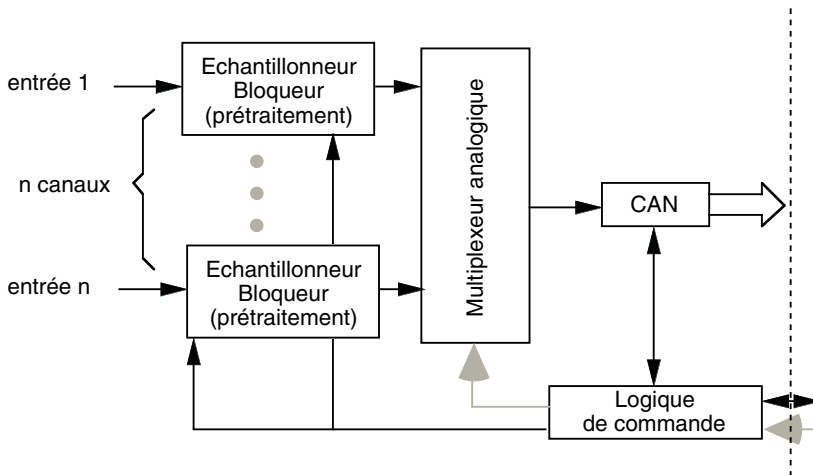


Figure 13.7. Multiplexage des sorties des échantillonneurs/bloqueurs.

L'inconvénient majeur reste le coût élevé dû au nombre important de composants.

c) Multiplexage des entrées analogiques

Dans ce cas le multiplexage est de type analogique et s'effectue en début de la chaîne d'acquisition de données (figure 13.8, page ci-contre). Le principal avantage réside

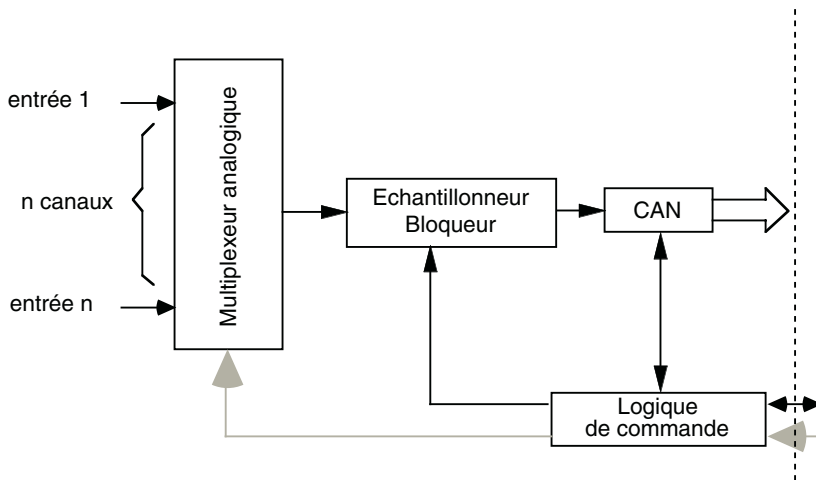


Figure 13.8. Multiplexage des entrées analogiques.

dans le fait que c'est le système le plus économique et le plus répandu. L'inconvénient de cette configuration est qu'elle ne permet pas de réaliser des acquisitions très rapides.

Dans ce dernier type d'architecture, la logique de commande permet d'optimiser le temps total d'acquisition. La gestion doit réaliser :

- sélection de la voie à acquérir (→ commande du multiplexeur) ;
- commande de l'échantillonneur/bloqueur ;
- commande du convertisseur ;
- lecture de la donnée convertie.

Soit

$$t_{\text{conversion total}} = t_{\text{multiplexeur}} + t_{\text{Échantillonneur/Bloqueur}} + t_{\text{conversion CAN}}$$

Pour réduire le temps global de l'acquisition, on peut convertir l'entrée e_i (E/B en mode blocage et CAN en conversion) et en même temps sélectionner la prochaine voie e_{i+1} à acquérir.

Le multiplexeur analogique peut être commandé en séquentiel (les voies étant sélectionnées les unes après les autres) ou en programmé (l'acquisition de certaines voies à variations rapides se faisant plus souvent).

13.3.2 Caractéristiques des cartes d'entrées/sorties

Le choix d'une carte d'entrées/sorties va être réalisé à partir des caractéristiques fournies par le constructeur. Chaque carte possède des spécifications techniques détaillées qui sont nécessaires lors du choix définitif. Mais dans une première étape, il est intéressant de pouvoir faire un choix rapide à partir des critères de base. Ces caractéristiques principales (*main features*) peuvent être classées en 5 groupes (tableau 13.1, page suivante) :

- 1 : les entrées analogiques ;
- 2 : les sorties analogiques ;

TABLEAU 13.1. Caractéristiques principales d'une carte d'entrées/sorties.

	Caractéristiques		Exemples
	français	anglais	
1	nombre d'entrées analogiques (simple et différentielle)	<i>input channels</i>	– 16 simples – 8 entrées différentielles
	fréquence maximale d'échantillonnage (nombre d'échantillons/s) <u>pour une voie</u>	<i>sampling rate</i>	100 kHz
	résolution (bits)	<i>resolution</i>	12
	domaines de tensions (V) possibles	<i>voltage range</i>	± 10 ou ± 5 ou 0 à 10
	gains possibles programmables	<i>gains</i>	1, 2, 5, 10, 20, 50, 100
2	nombre de sorties analogiques (toujours non multiplexées)	<i>output channels</i>	2
	résolution (bits)	<i>resolution</i>	12
	domaines de tensions (V) possibles	<i>voltage range</i>	± 5 ou 0 à 10
3	nombre d'entrées/sorties numériques	<i>digital input/output channels</i>	8
4	nombre de compteurs	<i>counters/timers</i>	2
	taille des compteurs (bits)		24
	fréquence d'horloge des compteurs	<i>clock frequency</i>	20 MHz
5	bus de connexion	<i>bus</i>	PCI
	possibilité d'accès direct à la mémoire de l'ordinateur	<i>DMA</i>	oui
	logiciels de gestion de la carte	<i>software drivers</i>	LabVIEW...

- 3 : les entrées/sorties numériques ;
- 4 : les compteurs ;
- 5 : les éléments externes.

Il est très important de faire les deux remarques suivantes :

- Les entrées différentielles sont obtenues par l'association de deux entrées simples ou de mode commun ;
- la fréquence d'échantillonnage affichée pour une carte d'acquisition concerne une voie, c'est-à-dire que pour l'acquisition sur plusieurs voies en même temps, en scrutation par exemple, il est nécessaire de diviser cette fréquence par le nombre de voies utilisées.

Les caractéristiques, dites secondaires, sont importantes pour vérifier l'adéquation d'un choix avec une application spécifique (tableau 13.2, page ci-contre).

Il ne faut pas oublier qu'au choix des cartes d'entrées/sorties décrites précédemment, s'ajoute dans la plupart des cas le conditionnement des signaux. Ces systèmes de conditionnement sont répartis en deux groupes :

- Conditionnement pour les entrées analogiques (thermocouple, isolation, multiplexeur, amplificateur...) ;
- Conditionnement pour les entrées/sorties numériques (relais, multiplexeur...).

TABLEAU 13.2. Caractéristiques secondaires d'une carte d'entrées/sorties.

	Caractéristiques		Exemples
	français	anglais	
1	type de CAN	<i>type of ADC</i>	CAN à approximations successives
	protection contre les surtensions (V)	<i>Overvoltage protection</i>	± 45
	taille du registre tampon d'entrée	<i>FIFO buffer size</i>	512 échantillons
	impédance d'entrée	<i>input impedance</i>	100 M Ω
	bande passante (–3 dB)	<i>bandwidth</i>	400 kHz
2	impédance de sortie	<i>impedance</i>	0,2 Ω max
	vitesse de montée en tension maximale	<i>slew rate</i>	10 V/ μ s
	protection	<i>protection</i>	mise à la masse de courte durée
3	logique utilisée	<i>compatibility</i>	TTL
4	logique utilisée	<i>compatibility</i>	TTL
	impulsion minimale prise compte	<i>min pulse duration</i>	60 ns
	précision de l'horloge	<i>clock accuracy</i>	0,01 %
5	consommation	<i>power requirement</i>	sur 5 V : 180 mA
	température de fonctionnement	<i>operating temperature</i>	de 0° à 70 °C
	humidité relative	<i>relative humidity</i>	5 % à 90 %

Le système d'entrées/sorties peut être aussi distribué via une communication de type série ou Ethernet grâce à des produits comme « FieldPoint » (National Instruments). On parle alors de modules d'entrées/sorties qui sont caractérisés par des paramètres identiques à ceux présentés. L'utilisation de ces modules à la place des cartes d'entrées/sorties est complètement transparente pour le programmeur au niveau du logiciel.

Prenons l'exemple d'une carte classique d'acquisition de données référencée PCI-6025E de chez National Instruments. Cette carte multifonctions est destinée à des applications courantes avec peu de contraintes temporelles. Les principales caractéristiques sont reportées dans le tableau 13.3, page suivante. L'architecture schématique de cette carte est présentée sur la figure 13.9, page suivante.

Chez les constructeurs de cartes d'entrées/sorties, les cartes sont classées selon différentes catégories :

- Cartes multifonctions qui correspondent à beaucoup d'application et possèdent des caractéristiques d'un très bon niveau ;
- Cartes multifonctions faible coût qui correspondent à des caractéristiques et une qualité proches mais inférieures aux cartes précédentes ;
- Cartes d'acquisition de signaux dynamiques qui garantissent une très grande qualité (résolution élevée) pour des applications de type son, sonar, analyse de vibrations, etc. ;
- Cartes compteur/timer qui permettent de disposer de nombreux circuits compteur/timer ;

TABEAU 13.3. Caractéristiques principales de la carte d'entrées/sorties PCI-6025E de chez National Instruments.

	Caractéristiques	Valeurs
1	nombre d'entrées analogiques (simple et différentielle)	16 entrées simples
	fréquence maximale d'échantillonnage <u>pour une voie</u>	200 K échantillons/s
	résolution (bits)	12
	domaines de tensions (V) possibles	± 10 , ± 5
	gains possibles programmables	1, 10, 100
2	nombre de sorties analogiques (toujours non multiplexées)	2
	résolution (bits)	12
	domaines de tensions (V) possibles	± 5 ou 0 à 10
3	nombre d'entrées/sorties numériques	32
4	nombre de compteurs	2
	taille des compteurs (bits)	24
	fréquence d'horloge des compteurs	8 MHz
5	bus de connexion	PCI
	possibilité d'accès direct à la mémoire de l'ordinateur	non
	logiciels de gestion de la carte	LabVIEW...

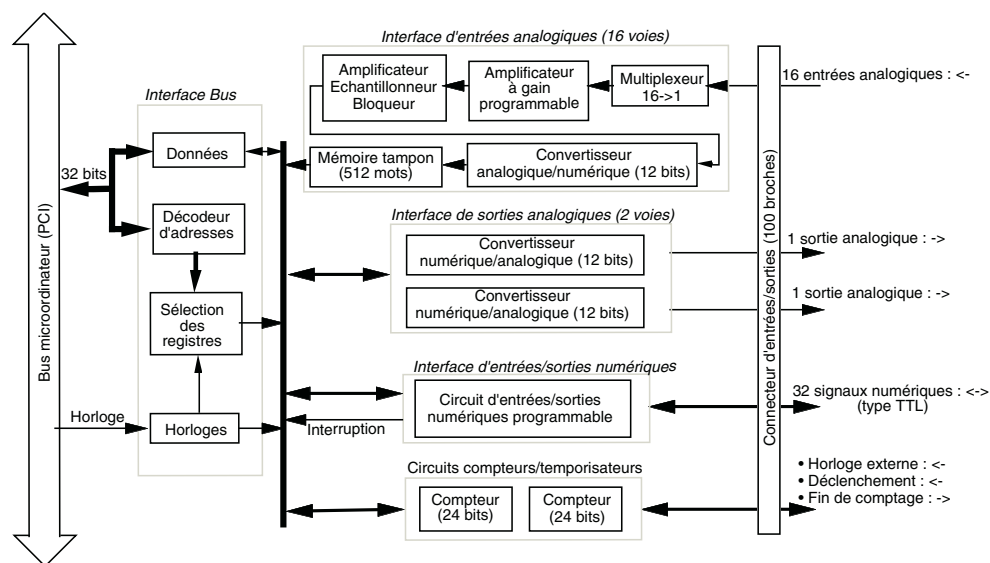


Figure 13.9. Architecture interne de la carte d'entrées/sorties référencée PCI-6025E (National Instruments).

- Cartes de sorties analogiques qui privilégient le paramètre correspondant à la fréquence de rafraîchissement des sorties ;
- Cartes d'entrées/sorties numériques qui permettent de disposer de nombreuses voies de type tout ou rien.

Sans aller plus loin dans la liste des produits actuellement disponibles chez les différents constructeurs de cartes, il est intéressant de noter quelques ordres de grandeur de caractéristiques techniques qu'il est possible de trouver (ref. National Instruments) :

- Nombre de voies d'entrées analogiques simples : 16 ;
- Résolution des voies d'entrées analogiques (bit) : 12 ou 16 ;
- Fréquence d'acquisition (Ech./s) : 20 K à 500 K (maximum 5 M) ;
- Nombre de voies de sorties analogiques : 2 à 10 (maximum 96) ;
- Résolution des voies de sorties analogiques (bit) : 12 (maximum 18) ;
- Fréquence de rafraîchissement (Ech./s) : 300 K à 1 M ;
- Nombre de voies d'entrées/sortie numériques : 8 à 32 (maximum 128) ;
- Fréquence de sortie (octet/s) : 400 K à 76 M ;
- Nombre de circuits compteur/timer : 2 à 8 (maximum 10) ;
- Taille des registres des circuits compteur/timer (bit) : 16, 24 ou 32.

13.4 MÉTHODOLOGIE DE MISE EN ŒUVRE D'UNE CHAÎNE D'ACQUISITION DE DONNÉES

13.4.1 Introduction

Considérons un procédé physique quelconque (chaîne de production, banc d'essais, expériences de laboratoires, etc.) qui doit être instrumenté, soit pour simplement réaliser des mesures ou des tests sur ce procédé ou pour mettre en place un contrôle complet de ce processus physique. En supposant que le procédé soit déjà équipé de capteurs et/ou d'actionneurs correctement choisis (chapitre 10.2), il se pose alors le problème de la mise en œuvre de la chaîne d'acquisition de données adaptée. Comme nous l'avons déjà vu, la définition de cet ensemble (procédé à instrumenter et système d'acquisition de données) doit passer par les différentes étapes d'analyse et de choix des éléments suivants :

- 1 - les phénomènes physiques à mesurer et à contrôler ;
- 2 - les capteurs et les actionneurs ;
- 3 - le matériel de conditionnement de signaux ;
- 4 - le matériel d'acquisition et de restitution de données ;
- 5 - l'ordinateur ;
- 6 - le logiciel.

Les deux premiers éléments de la chaîne de mesure et de contrôle (les phénomènes physiques à mesurer et à contrôler, et les capteurs et les actionneurs) doivent être déterminés en étudiant pour chaque point d'accès aux processus la continuité « grandeur physique - information » (figure 13.10, page suivante). En parallèle avec l'étude des deux points précédents, il est relativement facile de répondre au point 5, c'est-à-dire la configuration matérielle qui va être le support de l'application. Cette définition peut être faite de façon indépendante et doit répondre aux questions suivantes :

- type de micro-ordinateur (processeur, mémoire interne...) ;
- type de bus disponible (EISA, PCI...) ;
- système d'exploitation (Windows™, Linux, MacOS™...).

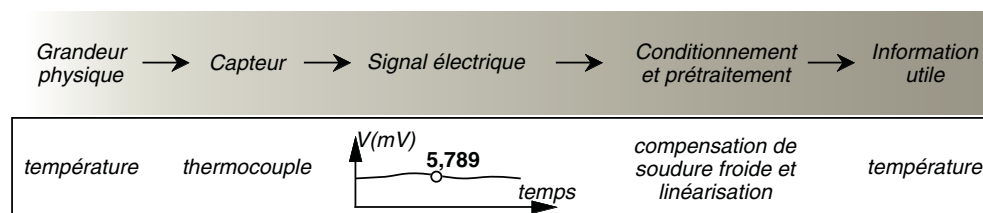


Figure 13.10. Représentation du début de la chaîne de mesure.

13.4.2 Caractérisation des signaux d'entrées/sorties

En supposant que ces différents points aient été correctement traités, les éléments cruciaux, correspondant aux points 3 et 4, vont être déterminés après une analyse précise de l'ensemble des signaux d'entrée/sortie. Le but est de traduire les principales caractéristiques de ces signaux (amplitude, temps, fréquence, précision, etc.) en caractéristiques de cartes d'acquisition étudiées au paragraphe précédent.

Avant de réaliser une classification précise de tous les signaux pouvant intervenir dans de telles applications, il est nécessaire de bien rappeler les différents types de signaux que l'on peut avoir à traiter et particulièrement de bien noter que cette différenciation est souvent faite par rapport aux paramètres temps ou fréquence. Ainsi nous pouvons distinguer (figure 13.11, page ci-contre) :

- les *signaux numériques* :
 - de type tout ou rien et lentement variables (désignés comme continu) : la caractéristique essentielle du signal est liée au niveau (on-off, 0–1, 0 V–5 V) à un instant donné. Aucune information n'est contenue dans les fronts de ce type de signal ;
 - de type impulsionnel et rapidement variables (désignés comme alternatif) : la caractéristique principale est liée à la fréquence ou à la durée des impulsions composant ce signal.
- les *signaux analogiques* :
 - lentement variables (de type continu) : la valeur précise de l'amplitude à un instant donné est le seul paramètre utile et de plus cette amplitude est considérée comme constante par rapport aux temps moyens d'acquisition ou de restitution de l'ordinateur ;
 - variables ou rapidement variables (de type alternatif) : les caractéristiques utiles sont uniquement le temps et l'amplitude, c'est-à-dire l'évolution temporelle de la forme du signal ;
 - rapidement variables ou très rapidement variables (de type alternatif) : une analyse temporelle et fréquentielle du signal est alors nécessaire afin d'extraire toute l'information du signal.

Afin de faire le choix le plus adapté, il est nécessaire d'une part d'identifier les différents types de signaux parmi les catégories suivantes et d'autre part de répondre aux principales questions afférentes à ces classes de signaux en séparant les entrées analogiques, les sorties analogiques, les entrées/sorties/numériques et les entrées/sorties de synchronisation.

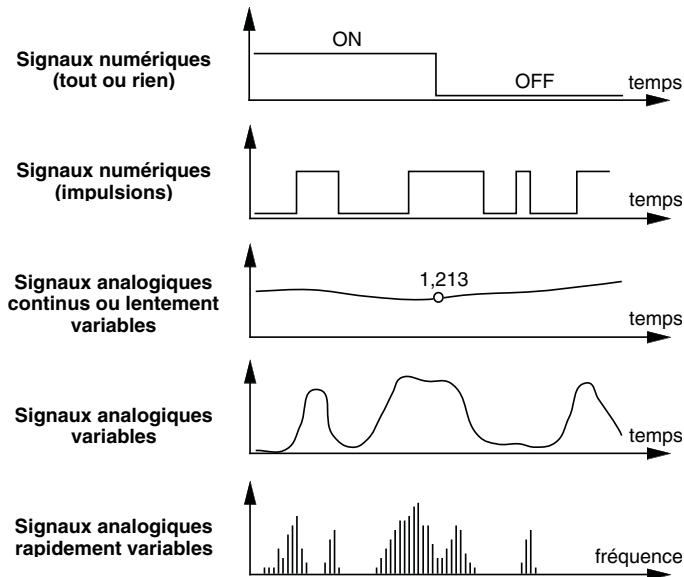


Figure 13.11. Classification des différents signaux d'entrée/sortie.

a) Entrées analogiques

Concernant ces signaux d'entrées, les questions à se poser sont les suivantes :

- *Isolation nécessaire ?* : pour des raisons de sécurité, il faut éviter que d'éventuels transitoires haute tension viennent détériorer l'ordinateur, voire mettre en danger l'opérateur (isolation optique ou par relais).
- *Résolution ?* de la conversion analogique-numérique : les choix les plus courants étant :
 - résolution de 12 bits : la gamme d'entrée analogique se divise en 4 096 niveaux, soit une précision de voltmètre de 3,6 chiffres. Ainsi, pour une gamme d'entrée de 0 à 10 V avec un gain de 1, la variation minimale de tension détectable est de 2,44 mV.
 - résolution de 16 bits : la gamme d'entrée analogique se divise en 65 536 niveaux, soit une précision de voltmètre de 4,8 chiffres. Ainsi, pour une gamme d'entrée de 0 à 10 V avec un gain de 1, la variation minimale de tension détectable est de 153 μ V.
- *Mesures en pont ?* : ce cas nécessite en général un signal une source d'excitation et un ensemble de circuits d'adaptation au pont de mesure.
- *Type de signaux ?* : les signaux peuvent être de type continu (exemple : mesure de température, tension d'accumulateurs, courant d'accumulateurs, mesure de niveau, mesure de contrainte...) ou de type alternatif (exemple : vibration, audio, acoustique, parole, sonar, écoulement de fluide...).
- signaux continus ? :
 - *principaux types de signaux continus* : thermocouples (références des capteurs utilisés : J, K, T...), dispositifs résistifs, signaux en courant (deux

gammes standards : 4–20 mA et 0–20 mA), signaux en tension (cas correspondant à la plupart des signaux à mesurer) ;

- *amplitude maximale à acquérir ?* : cette donnée va conditionner l'utilisation d'un amplificateur pour amener le signal dans une gamme de tension correcte pour la conversion analogique.
- signaux alternatifs ?
 - *fréquence maximale contenue dans le signal et utile à l'analyse ?* : cette caractéristique d'une extrême importance permettra de fixer la fréquence d'échantillonnage, mais aussi de déterminer ou de vérifier la fréquence de coupure du filtre anti-repliement par rapport à cette fréquence d'échantillonnage ;
 - *amplitude maximale à acquérir ?* : cette donnée va conditionner l'utilisation d'un amplificateur pour amener le signal dans une gamme de tension correcte pour la conversion analogique. Dans certains cas où le gain nécessaire atteint des valeurs importantes (supérieures à 100), il faut s'assurer que l'amplificateur utilisé peut fonctionner à la vitesse d'échantillonnage choisie, c'est-à-dire que sa bande passante contient cette fréquence d'échantillonnage. Dans le cas contraire, il sera nécessaire d'utiliser un amplificateur dit d'instrumentation au niveau du système de conditionnement.

b) Sorties analogiques

Concernant ces signaux d'entrées, les questions à se poser sont les suivantes :

- *Type de signaux ?* :
 - signaux en courant ? : les gammes disponibles sont 4–20 mA et 0–20 mA ;
 - signaux en tension ? : cas classique.
- *Puissance maximale à fournir ?* : cette donnée va caractériser la sortie au niveau de la tension et surtout du courant de sortie de la carte. Si nécessaire un amplificateur de puissance ou de courant sera ajouté à la carte pour pouvoir effectivement commander l'actionneur.
- *Isolation nécessaire ?* : pour des raisons de sécurité, il faut éviter que d'éventuels transitoires haute tension viennent détériorer l'ordinateur, voire mettre en danger l'opérateur (isolation optique ou par relais).
- *Fréquence maximale du signal à fournir ?* : cette caractéristique n'a pas la même importance que pour les entrées analogiques puisqu'en général les capacités des sorties sont bien supérieures à celles des entrées.

c) Entrées/sorties numériques

Concernant ces signaux d'entrées/sorties, les questions à se poser sont les suivantes :

- *isolation nécessaire ?* : pour des raisons de sécurité, il faut éviter que d'éventuels transitoires haute tension viennent détériorer l'ordinateur, voire mettre en danger l'opérateur (isolation optique ou par relais).

- *adaptation d'amplitude ?* : les cartes d'acquisition sont en général munies d'entrées/sorties numériques n'acceptant que les signaux de type TTL, aussi il peut s'avérer nécessaire de procéder à une adaptation en tension à l'aide d'un système conditionnement.

d) Entrées/Sorties de synchronisation

Il est important de noter que des utilisations de type scrutation de canaux, génération de signaux ou l'acquisition d'un grand nombre d'échantillons ($> 64 \text{ Ko}$) nécessitent l'emploi des temporisateurs/compteurs et donc ils peuvent ne pas être disponibles pour l'application elle-même. Dans ce cas il existe des cartes temporisateurs/compteurs spécifiques.

e) Conclusion

Pour terminer avec la caractérisation des signaux, le point le plus important et en même temps le plus délicat est effectivement de réaliser la correspondance entre le cahier des charges de l'application et les caractéristiques des cartes disponibles au niveau des signaux analogiques non continus. La figure 13.12 illustre ce travail d'une façon générale au niveau des paramètres : amplitude maximale, quantum de conversion et fréquence de conversion.

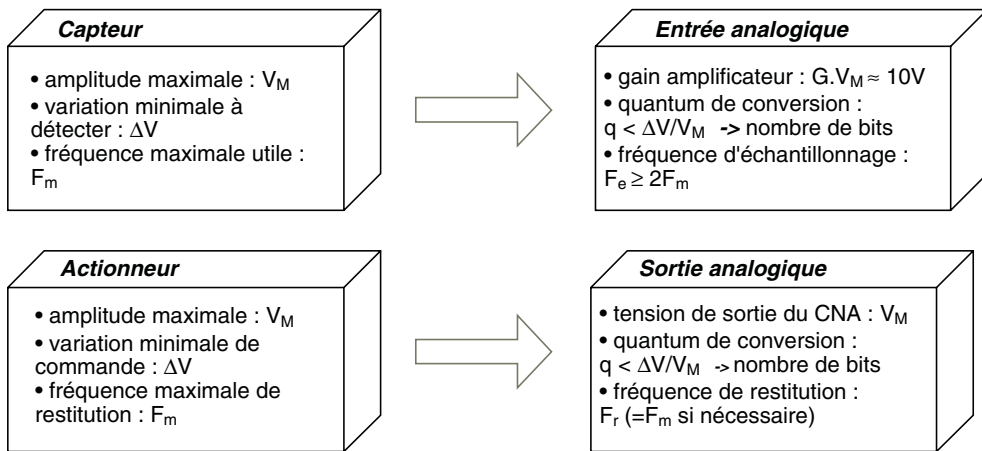


Figure 13.12. Traduction des caractéristiques des signaux électriques provenant des capteurs ou allant vers les actionneurs en caractéristiques de cartes d'acquisition ou de restitution de données.

Concernant le point 4 (matériel d'acquisition et de restitution de données), le dernier choix à faire est d'opter pour un système à base de cartes enfichables dans l'ordinateur lui-même en utilisant le bus interne ou de décider d'adjoindre à l'ordinateur un système d'acquisition de données externe ou déporté relié à ce dernier par une liaison parallèle ou série. Cette dernière solution qui sera sans nul doute la plus coûteuse permet d'avoir une configuration plus modulaire et surtout de pouvoir

intégrer dans ces systèmes d'acquisition déportés les modules de conditionnement correspondant aux divers capteurs et actionneurs.

De plus, certaines applications nécessitent des traitements de signaux importants qui doivent malgré tout être effectués dans des temps limités soit pour des raisons de réactivité du système vis-à-vis du procédé (reconnaissance d'image dans une chaîne de production), soit pour simplement limiter le temps d'attente de l'utilisateur (analyse spectrale d'une image).

Dans le cadre de ces besoins spécifiques, il est possible d'utiliser des cartes enfichables qui possèdent un processeur de traitement du signal directement intégré, appelé DSP (*Digital Signal Processing*). Ces processeurs spécialisés permettent de réaliser une programmation efficace de la plupart des algorithmes de traitement du signal, comme par exemple la transformée de Fourier rapide (chapitre 8). En ce qui concerne ces cartes, d'autres caractéristiques se rajoutent à celles déjà vues : le processeur avec sa vitesse d'exécution, la mémoire interne à la carte permettant de traiter des tableaux de données plus ou moins importants, la précision du calcul (toujours réalisé en flottant)...

D'autres solutions proposent une carte spécifique sur laquelle est intégré un processeur, et des composants d'entrées/sorties. De plus, sur cette carte, réside un système d'exploitation temps réel qui permet d'obtenir des garanties sur les temps. Après une compilation particulière, les programmes complets sont ainsi embarqués sur le processeur de la carte. Une fois embarqué, le programme s'exécute directement sur la carte, en totale indépendance vis-à-vis du processeur de l'ordinateur hôte. Les utilisateurs disposent ainsi d'un moyen de réaliser de véritables applications temps réel, déterministes.

Cette solution est par exemple celle proposée par National Instruments avec le produit LabVIEW Real-Time. En fait, LabVIEW Real-Time est constitué de deux éléments : le compilateur qui s'intègre à l'environnement de développement LabVIEW et la carte spécifique avec le noyau temps réel. Les variations temporelles ou gigue sont inférieures à 10 μ s, temps compatible avec la plupart des applications.

13.4.3 Méthodologie d'analyse

Le concepteur d'application de mesures ou de contrôles de procédés physiques doit donc suivre une méthodologie précise afin de ne pas omettre des caractéristiques importantes qui risquent de fortement diminuer la qualité de la chaîne d'acquisition ou de restitution de données (figure 13.13, page ci-contre). Le résultat du suivi de cette méthodologie n'est bien évidemment pas unique puisque de nombreux facteurs ou caractéristiques restent indéterminés et dépendent de l'application comme :

- la compacité (applications embarquées) ;
- le coût (applications de grande production) ;
- des matériels déjà acquis et disponibles.

La société National Instruments propose un logiciel libre appelé *DAQ Designer* qui aide le concepteur à définir précisément et complètement quelles combinaisons matérielles et logicielles conviennent le mieux pour son système d'acquisition de

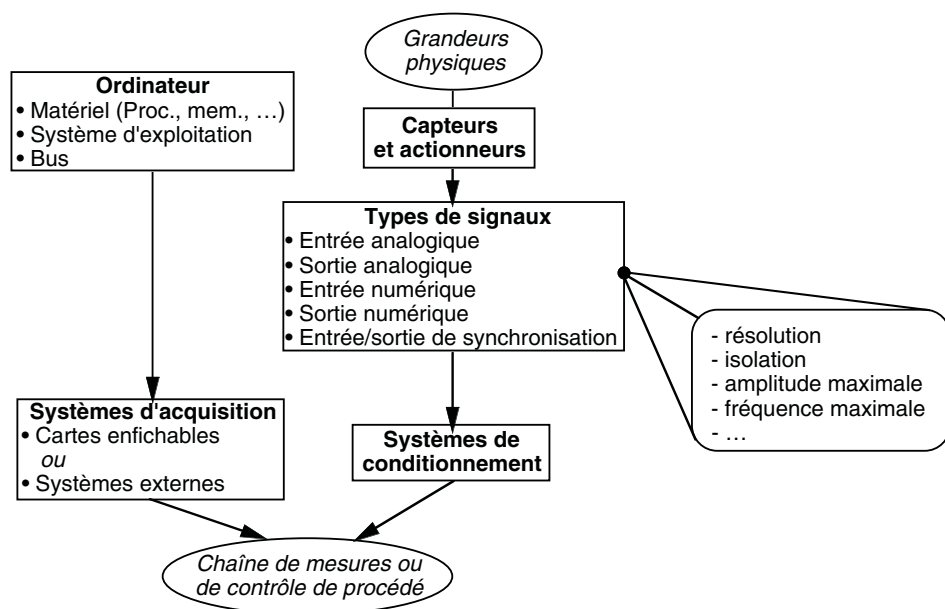


Figure 13.13. Méthodologie de mise en œuvre d'une chaîne d'acquisition de données.

données. Ce logiciel pose un ensemble de questions sur chaque domaine du système d'acquisition de données ; les réponses à ces questions définissent progressivement l'architecture matérielle de l'application. Un exemple de ce type de questionnaire est présenté sur la figure 13.14.

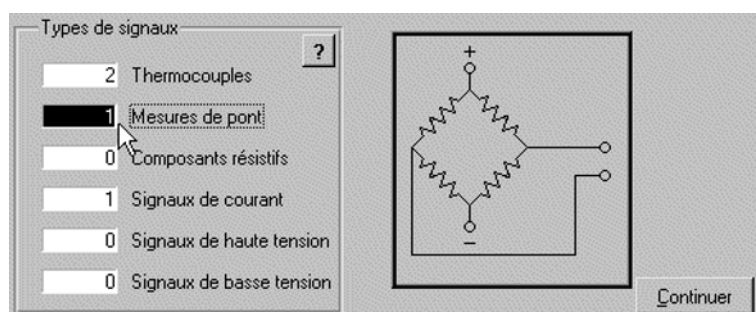


Figure 13.14. Visualisation d'un écran du logiciel *DAQ Designer* d'aide à la définition d'application de mesures ou de contrôle/commande : choix du type de signaux.

13.4.4 Les modes d'acquisition de données

L'utilisation de ces cartes d'entrées/sorties peut se faire sur la base de trois modes : simple, continue et circulaire. le *mode simple d'acquisition de données* consiste à réaliser une acquisition de données d'un nombre préalablement fixé de points de

mesures. Le procédé est alors observé une seule fois ou de temps en temps (cycles de mesures séparés par une durée non précise). Le pilotage de la carte est grandement facilité par le fait qu'il n'y a aucun problème de synchronisation et de gestion rapide du traitement des données par l'ordinateur.

Dans le cas où le procédé doit être observé de façon continue, il est nécessaire de faire appel à des fonctions d'acquisition plus efficaces et spécialisées. Ce *mode continu d'acquisition de données* nécessite d'avoir une mémoire tampon ou buffer sur la carte suffisamment importante. À chaque mesure réalisée au rythme spécifié dans la configuration, le programme de gestion interne à la carte sauvegarde les mesures dans le buffer. En parallèle le programme vient lire ces données dans la mémoire tampon. La récupération de ces mesures est souvent paramétrable en taille (au maximum égale à la taille du buffer). Le buffer des données mesurées peut ainsi être rempli en une ou plusieurs fois.

Un cas très intéressant est la gestion circulaire de ce buffer. Dans ce *mode circulaire d'acquisition de données*, le buffer une fois rempli va remplacer les premières données enregistrées par les nouvelles (figure 13.15).

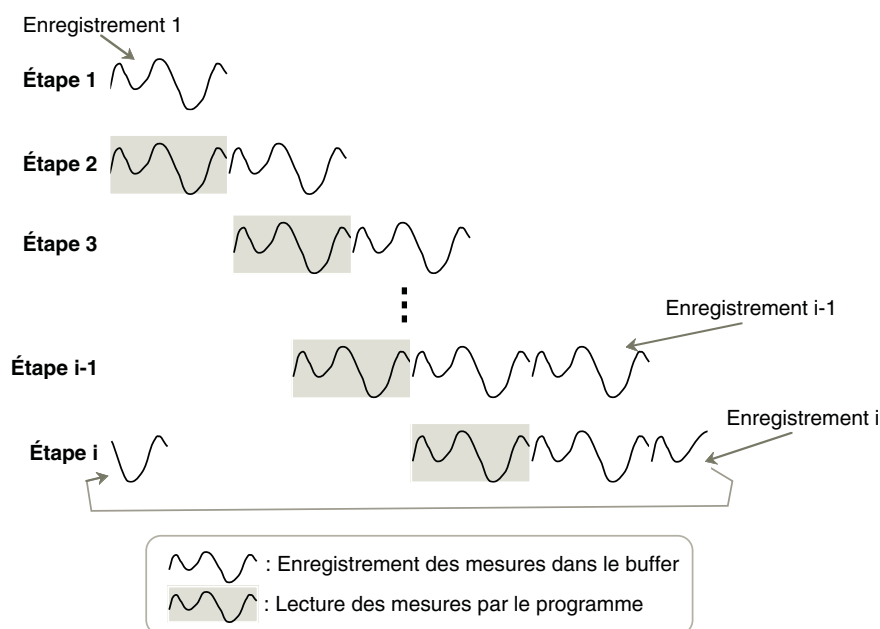


Figure 13.15. Fonctionnement circulaire du buffer de sauvegarde des données acquises en mode d'acquisition continue.

Il est aussi important de noter que la vitesse d'acquisition et de sauvegarde dans le buffer peut être plus rapide que la vitesse de lecture des données. Dans ce cas, il y a un problème de saturation du buffer qui doit être détecté et géré par la modification et l'adaptation des paramètres : vitesse d'acquisition, taille du buffer, vitesse et taille de lecture.

EXERCICE D'APPLICATION

Exercice 13.1 (Choix d'une carte d'acquisition et de restitution de données)

On considère une application industrielle à instrumenter. Cette application est caractérisée par ses entrées/sorties au niveau des capteurs et actionneurs utilisés. Soit :

- 2 actionneurs tout ou rien avec un temps de réponse de 20 ms ;
- un actionneur à commande continue spécifié par :
 - fréquence maximale de restitution : 3 kHz
 - variation de la tension à fournir : de -5 V à $+5\text{ V}$
 - précision de la tension de commande : 5 mV
- un premier capteur spécifié par :
 - fréquence maximale d'acquisition : 100 Hz
 - variation de la tension fournie par le capteur : 0 à 10 mV
 - précision de mesure : $10\text{ }\mu\text{V}$
- un deuxième capteur spécifié par :
 - fréquence maximale d'acquisition : 10 kHz
 - variation de la tension fournie par le capteur : 0 à 1 V
 - précision de mesure : 5 mV

Étant donné un ensemble de cartes d'entrées/sorties analogiques et numériques, référencées par les lettres de A à E, le problème consiste à choisir la carte la plus adaptée à cette application. Les caractéristiques de cartes disponibles sont présentées dans le tableau 13.4, page suivante.

Choisir la carte (A à E) correspondant le mieux aux spécifications de l'application. Justifier clairement votre réponse en précisant la ou les caractéristiques des cartes qui conduisent à la rejeter.

Solution

Pour réaliser ce choix de façon rigoureuse, il est nécessaire d'analyser les spécifications de l'application pour les traduire en termes de caractéristiques d'échantillonnage, de quantification, etc. Reprenons l'ensemble des caractéristiques et voyons leurs implications directes :

- 2 actionneurs tout ou rien avec un temps de réponse de 20 ms : cela implique 2 sorties numériques. Le temps de réponse demandé est une condition largement satisfaite par tout système électronique numérique.
- un actionneur à commande continue spécifié par :
 - fréquence maximale de restitution de 3 kHz : cette condition est aussi largement satisfaite, car tout CNA possède un temps de conversion beaucoup plus rapide (inférieur à $10\text{ }\mu\text{s}$).

TABLEAU 13.4. Caractéristiques des cartes d'entrées/sorties disponibles.

Caractéristiques Référence de la carte	A	B	C	D	E
• Entrées analogiques :					
– nombre d'entrées analogiques	16	8	8	4	8
– fréquence d'échantillonnage	85 kHz	42 kHz	100 kHz	55 kHz	60 kHz
– résolution (bits)	16	12	8	12	12
– tensions d'entrées (V)	[0, 10]	[0, 10]	[0, 10] & [-5, 5]	[0, 10]	[0, 10] & [-5, 5]
– gains programmables	1, 10, 10 ² , 10 ³	1, 10, 10 ² , 10 ³	1, 10, 10 ² , 10 ³	2, 5, 10, 10 ²	1, 10, 10 ² , 10 ³
• Sorties analogiques :					
– nombre de sorties analogiques	16	8	8	4	8
– résolution (bits)	16	12	8	12	12
– tensions de sorties (V)	[0, 10] & [-5, 5]	[0, 10] & [-5, 5]	[-5, + 5]	[-5, + 5]	[0, 10]
• Entrées/sorties numériques :	0	8	4	16	2

- variation de la tension à fournir de -5 V à $+5\text{ V}$: domaine de tension que doit fournir le CNA de la carte.
- précision de la tension de commande de 5 mV : cette précision impose d'avoir un CNA de 10 bits permettant une précision sur une tension maximale de 10 V d'environ 10 mV ($= 10\text{ V}/2^{10}$).
- un premier capteur spécifié par :
 - fréquence maximale d'acquisition de 100 Hz : cette condition conduit à une fréquence d'acquisition d'au moins 200 Hz (théorème de Shannon) : valeur très peu exigeante vis-à-vis du CAN.
 - variation de la tension fournie par le capteur de 0 à 10 mV : ce domaine de tensions très faibles conduit à utiliser un amplificateur programmable dont le gain doit être au moins de $1\,000$ pour arriver à une plage de valeur compatible avec les CAN, c'est-à-dire de 0 à 10 V .
 - précision de mesure de $10\text{ }\mu\text{V}$: avec le gain de $1\,000$ qui sera utilisé, cette précision de mesure se traduit par 10 mV , d'où un CAN de 10 bits permettant une précision sur une tension maximale de 10 V d'environ 10 mV ($= 10\text{ V}/2^{10}$).
- un deuxième capteur spécifié par :
 - fréquence maximale d'acquisition de 10 kHz : cette condition conduit à une fréquence d'acquisition d'au moins 20 kHz (théorème de Shannon) : valeur assez exigeante vis-à-vis de la carte et du CAN partagé par plusieurs voies de mesure.
 - variation de la tension fournie par le capteur de 0 à 1 V : ce domaine de tensions conduit à utiliser un amplificateur programmable de gain 10 pour arriver à une plage de valeur compatible avec les CAN, c'est-à-dire de 0 à 10 V .

- précision de mesure de 5 mV : avec le gain de 10 qui sera utilisé, cette précision de mesure se traduit par 50 mV, d'où un CAN de 8 bits permettant une précision sur une tension maximale de 10 V d'environ 40 mV ($= 10 \text{ V}/2^8$).

De plus, par rapport à la caractéristique « fréquence d'échantillonnage » d'une carte d'acquisition, il est important de rappeler que celle-ci correspond à une acquisition sur une voie et donc dans le cas d'une application réalisant une acquisition sur plusieurs voies il est nécessaire de diviser cette fréquence d'échantillonnage par le nombre de voies utilisées. Ainsi, pour l'exemple traité, nous avons 2 voies d'acquisition à utiliser.

Le résultat de cette recherche de la carte adaptée à cette application, il est possible de répondre par la négative, c'est-à-dire les cartes qui ne conviennent pas à cause d'une caractéristique particulière (tableau 13.5) :

- carte A : pas d'entrées/sorties numériques (N.B. : si cette carte était munie de sorties analogiques, il serait tout à fait possible de les utiliser en sorties numériques) ;
- carte C : résolution du CAN (8 bits) trop faible pour un des capteurs (besoin : 10 bits) ;
- carte D : gain programmable limité à 100 (besoin : 1 000) ;
- carte E : domaine de la tension de sortie du CNA uniquement en unipolaire (0 à 10 V) (besoin : -5 V à 5 V).

En résumé, la carte qui répond à toutes les caractéristiques de l'application est la *carte B* :

TABLEAU 13.5. Caractéristiques des cartes d'entrées/sorties qui ne conviennent pas à l'application particulière (en gris).

Caractéristiques Référence de la carte	A	B	C	D	E
● <i>Entrées analogiques</i> :					
– nombre d'entrées analogiques	16	8	8	4	8
– fréquence d'échantillonnage	85 kHz	42 kHz	100 kHz	55 kHz	60 kHz
– résolution (bits)	16	12	8	12	12
– tensions d'entrées (V)	[0, 10]	[0, 10]	[0, 10] & [-5, 5]	[0, 10]	[0, 10] & [-5, 5]
– gains programmables	1, 10, 10^2 , 10^3	1, 10, 10^2 , 10^3	1, 10, 10^2 , 10^3	2, 5, 10, 10^2	1, 10, 10^2 , 10^3
● <i>Sorties analogiques</i> :					
– nombre de sorties analogiques	16	8	8	4	8
– résolution (bits)	16	12	8	12	12
– tensions de sorties (V)	[0, 10] & [-5, 5]	[0, 10] & [-5, 5]	[-5, +5]	[-5, +5]	[0, 10]
● <i>Entrées/sorties numériques</i> :	0	8	4	16	2

Chapitre 14

Exemple d'applications

14.1 PILOTAGE D'UNE MACHINE À COMPRESSION RAPIDE POUR DES ESSAIS DE COMBUSTION

14.1.1 Présentation générale de l'application

Afin de modéliser les phénomènes de combustion dans un moteur à explosion, l'objectif de ce projet était de construire une machine de compression rapide permettant d'étudier, aux travers de mesures optiques, les phénomènes qui se produisent dans une chambre de combustion de grande dimension. La solution a été d'associer un ensemble mécanique sophistiqué avec un système d'acquisition de données permettant de gérer le pilotage de cet ensemble : les sécurités qu'il nécessite et le déclenchement de l'instrumentation de mesure optique.

Les recherches poussées sur la combustion dans les moteurs à piston utilisent des montages expérimentaux dédiés tels que des chambres à combustion statique ou des machines à compression rapide afin de découpler et de reproduire les phénomènes fondamentaux qui se produisent dans les moteurs comme :

- Influence de l'aérodynamique ;
- Intensité de la turbulence ;
- Stratification du carburant ;
- Ignition de l'inflammation du mélange ;
- Propagation de la combustion ;
- ...

Afin d'étendre ce champ d'investigation aux nouveaux modes de combustion envisagés pour l'avenir comme l'injection diesel à très haute pression, cette expérimentation intègre une machine de compression rapide munie d'une chambre de combustion parallélépipédique transparente pouvant supporter des pressions élevées et capable de reproduire des taux de compression de 9 (représentatif des moteurs à essence) jusqu'à 21 (supérieur à celui d'un moteur diesel standard). Ce taux de compression permet ainsi de couvrir l'ensemble de la gamme possible des moteurs actuels et au-delà (figure 14.1).

Le principal défi de cette machine de compression rapide était d'ordre mécanique. En effet il fallait pouvoir animer le piston de la machine avec une vitesse de 20 m/s afin d'obtenir les caractéristiques expérimentales désirées.

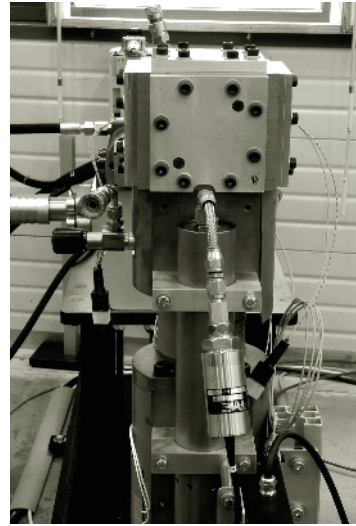


Figure 14.1 La chambre de combustion est équipée de nombreux capteurs.

14.1.2 Description de la partie mécanique

La réalisation de cette machine de compression rapide permet de disposer d'une chambre de combustion transparente (en quartz) et parallélépipédique, étanche à 220 bars et d'un volume hors du commun (de 125 à 52,5 cm³). Ces dimensions spécifiques ouvrent la possibilité d'étudier avec précision, au moyen d'une instrumentation laser.

Afin de répondre au cahier des charges du laboratoire, le principal défi étant la vitesse de 20 m/s, il a donc fallu imaginer un système basé sur le principe de la catapulte pour démultiplier la vitesse d'un vérin hydraulique. Ce vérin, commandé par une servovalve ultra-rapide (temps de réponse en boucle ouverte environ 5 ms) est elle-même alimentée par une centrale hydraulique permettant un débit de 400 l/min, qui propulse une bielle en acier de grande dimension liée à un chariot de 40 kg installé horizontalement sur des rails. Ce chariot est équipé d'une came dont le profil vient percuter un galet solidaire de l'axe du piston vertical. Le profil est calculé pour reproduire le mouvement de bielle/manivelle d'un moteur à 800 tr/min. Le déplacement horizontal de la came imprime ainsi le déplacement vertical du piston avec une vitesse et une force suffisantes. Il a été nécessaire d'installer des freins hydrauliques (commandés de façon mécanique, par sécurité) sur le trajet du chariot afin d'arrêter la course de celui-ci, qui passe de 0 à 40 km/h puis de 40 km/h à 0 en 60 ms (figure 14.2).

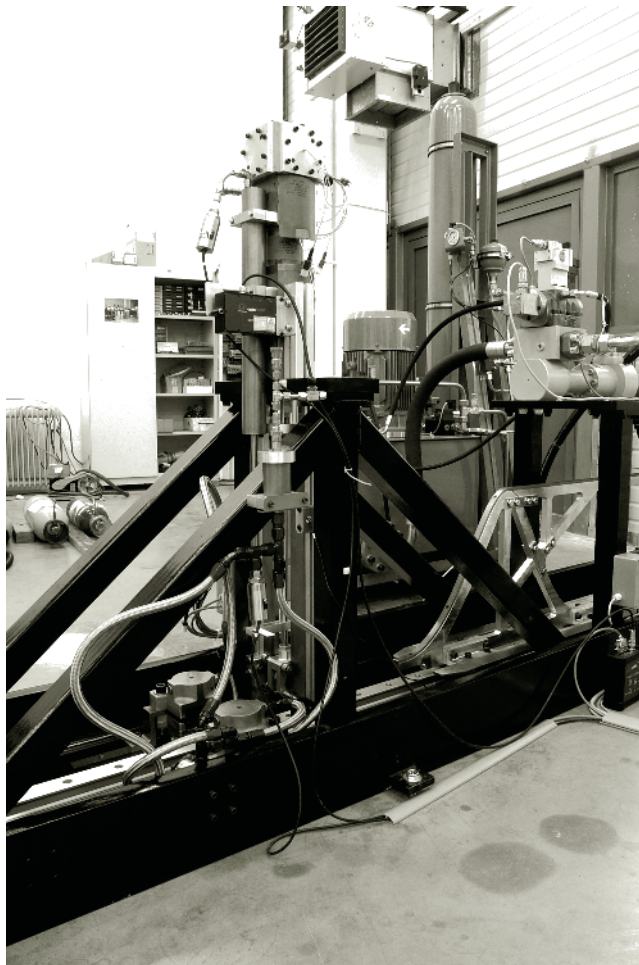


Figure 14.2 La machine à compression rapide : structure mécanique.

14.1.3 Description de la partie mesure et contrôle

La partie mécanique étant définie et réalisée, le système a été équipé de divers moyens de mesure :

- un capteur laser pour mesurer le déplacement ;
- des capteurs inductifs positionnés le long de l'axe du piston pour déclencher l'instrumentation optique (caméras infrarouges notamment) et générer l'étincelle d'allumage à différents instants proches du point mort haut ;
- un capteur pour mesurer la pression dynamique dans la chambre de combustion ;
- un thermocouple utilisé lors d'essais particuliers où la chambre est chauffée, et régulée en température par LabVIEW.

À noter qu'en plus d'un système de chauffage, la chambre est équipée de vannes destinées à la vidange et au remplissage de mélanges gazeux, ainsi que d'un vérin dont le but est de créer des effets de turbulences.

Toutes les mesures sont acquises par une seule carte d'acquisition de données multifonction de la série M, une carte PCI-6259 de la société National Instruments, choisie parce qu'elle offre un grand nombre de voies d'entrée analogique (32), une précision de 16 bits, des sorties analogiques pour le pilotage de la servovalve, ainsi que des entrées/sorties numériques utilisées pour la régulation de température, pour les informations de sécurité machine et pour déclencher l'appareillage optique externe. Les compteurs de cette carte se sont révélés utiles à posteriori (l'un pour générer le signal périodique du LASER, le second étant utilisé pour le déclenchement des signaux numériques envoyés aux appareils externes). Cette carte a également été choisie parce qu'elle est capable, avec sa fréquence maximum de 1 M.échantillons/s, de répondre aux besoins de vitesse d'acquisition élevée sur chaque voie (100 kHz). Enfin, elle s'est révélée particulièrement performante au niveau des décalages temporels entre les voies, suffisamment faibles pour être ignorés. En complément de cette carte, installé dans l'ordinateur de contrôle, le pupitre opérateur intègre un boîtier de commande qui permet de mettre le groupe hydraulique en route de façon manuelle uniquement, avec des voyants indicateurs d'éventuels défauts, la mise en pression et les défauts étant gérés par l'ordinateur.

En ce qui concerne le logiciel, l'ensemble de l'application a été développé sous LabVIEW de la société National Instruments. Elle gère le pilotage de la servovalve, les déclenchements des appareils optiques, les mesures et la sécurité. Concernant la sécurité, la taille de la machine et les vitesses de certaines pièces mécaniques obligent à prendre un maximum de précautions avant l'exécution de tout essai. Il convient notamment de vérifier la pression des freins. Par ailleurs, l'application est protégée par des mots de passe, qui sécurisent l'accès aux paramètres relatifs au contrôle automatique et au contrôle de la servo-valve, notamment. Enfin, Le programme gère également un système de chauffage utilisé pour modifier les conditions de fonctionnement de la chambre de combustion. L'interface utilisateur se compose de voyants indiquant les sécurités machine, la présence de la came... pour indiquer à l'opérateur s'il peut lancer l'essai. Elle intègre aussi une partie destinée à la configuration et aux réglages des paramètres de l'acquisition et de la génération de données, ainsi que des graphes montrant les mesures et résultats obtenus suite aux tirs effectués (figure 14.3).

En ce qui concerne les signaux obtenus, il a été nécessaire de réaliser un filtrage numérique haute fréquence permettant d'éliminer le bruit. De plus, des fonctions d'analyse automatique des signaux ont été mises en place afin de faire des comparaisons entre les essais : détection de l'amplitude crête, mesure du temps de montée, etc.

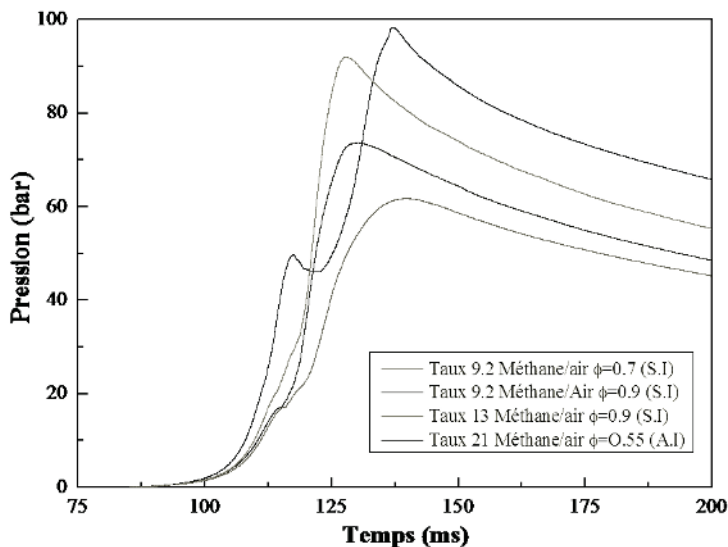


Figure 14.3 La machine de compression permet de réaliser des essais sur des taux de compressions jusqu'à 21, qui correspondent à l'auto-allumage du carburant.

14.1.4 Conclusion

L'application donne entière satisfaction au laboratoire qui peut désormais effectuer des tirs avec tous les taux de compressions souhaités, de 9 à 21 (taux que l'on retrouve dans les moteurs diesel). Ils ont ainsi réussi à obtenir l'auto-allumage avec un taux de 21... ce qui n'avait pas pu être possible jusque là avec une chambre aussi grande. Le laboratoire a demandé de nouvelles évolutions. Un vérin secondaire va être installé pour modifier les conditions de pression de la chambre de combustion. Il est également prévu de piloter le laser optique à partir de l'application. L'application logicielle est déjà prête pour cette évolution, mais les tests restent à faire. Plus tard, la machine devra permettre d'effectuer des mesures dans la phase de détente du piston, ce qui va nécessiter de modifier sensiblement la partie mécanique de la machine.

Spécialisée dans la conception et la fabrication de machines d'essais spéciaux, comme des bancs moteurs, des bancs d'endurance ou encore des machines de fatigue, la société bayonnaise Akira associe des compétences à la fois mécaniques, électroniques, informatiques et métrologiques, qui lui ont permis de répondre au cahier des charges du laboratoire LCD (Laboratoire de Combustion et de Détonique) du CNRS installé sur le site de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique au Futuroscope – Chasseneuil du Poitou.

14.2 ÉTUDE D'ÉCOULEMENTS TURBULENTS RÉACTIFS PAR VÉLOCIMÉTRIE LASER

14.2.1 Présentation générale de l'application

Afin de développer les chambres de combustion des turboréacteurs du futur, il est nécessaire de calibrer les outils de simulation numérique sur des bancs d'essai reproduisant, sous forme simplifiée, l'ensemble des phénomènes spécifiques aux chambres en développement. Le banc d'essai double-flux, appelé ORACLES, a été spécifiquement construit au laboratoire dans cette optique pour l'étude d'écoulements turbulents réactifs représentatifs de ceux qui existent au sein des chambres de combustion en développement (figure 14.4).

La caractérisation de ce type d'écoulement passe en premier lieu par une bonne connaissance du champ des vitesses. La vélocimétrie laser est alors l'outil incontournable à utiliser dans ce but. C'est dans ce cadre, qu'un programme modulaire d'acquisition et de traitements des données écrit avec le langage graphique LabVIEW a été développé.

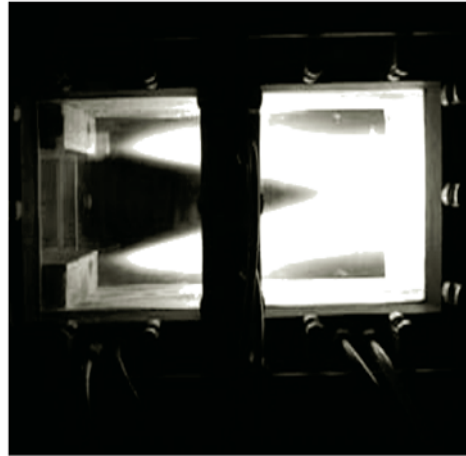


Figure 14.4 Image caractéristique des écoulements réactifs obtenus ainsi qu'une vue de la chambre de combustion.

14.2.2 Cahier des charges et méthodologie expérimentale

Notre objectif est de réaliser des mesures par vélocimétrie laser dans des conditions optimales conditionnées notamment par :

- La rapidité d'acquisition afin de réduire les temps de mesure et donc les coûts associés ; afin de fixer les idées dans ce domaine. Précisons qu'une cartographie du champ des vitesses nécessite d'effectuer les mesures en un millier de points du champ d'écoulement et qu'en chacun de ces points, de l'ordre de dix mille valeurs de vitesse doivent être acquises ;
- l'ergonomie de l'interface permettant à des utilisateurs non spécialistes d'être rapidement opérationnels ;
- la modularité du programme permettant une évolution aisée de celui-ci.

Les équipements pilotés par le programme sont :

- une interface GPIB implantée sur l'ordinateur exécutant le programme ;
- une interface série ;
- deux analyseurs de spectre reliés à l'ordinateur par l'interface GPIB ;

- un système 3D de déplacement du point de mesure à moteurs pas à pas et connecté via l'interface série.

Les traitements des données acquises, comme les grandeurs moyennes de la vitesse et des fluctuations associées, sont les histogrammes et leurs propriétés (déviation et aplatissement) et les spectres des fluctuations.

Les quelques figures présentées permettent de visualiser l'environnement logiciel au sein duquel « évolue » alors l'expérimentateur. La figure 14.5 donne un exemple des « faces avant » dont l'utilisateur dispose afin de procéder à la définition du maillage 3D qui va être exploré au sein de l'écoulement ainsi qu'au paramétrage des fichiers de stockage. La figure 14.6 présente un exemple de résultats obtenus après traitement des données (spectre et auto-corrélation des fluctuations d'une composante de la vitesse de l'écoulement) ainsi que l'exemple de face avant affichée en cours de mesure qui renseigne sur l'état de la mesure courante (histogramme de vitesse et de temps d'arrivée des particules d'ensemencement, nombre de mesures instantanées effectuées, taux de validation...).

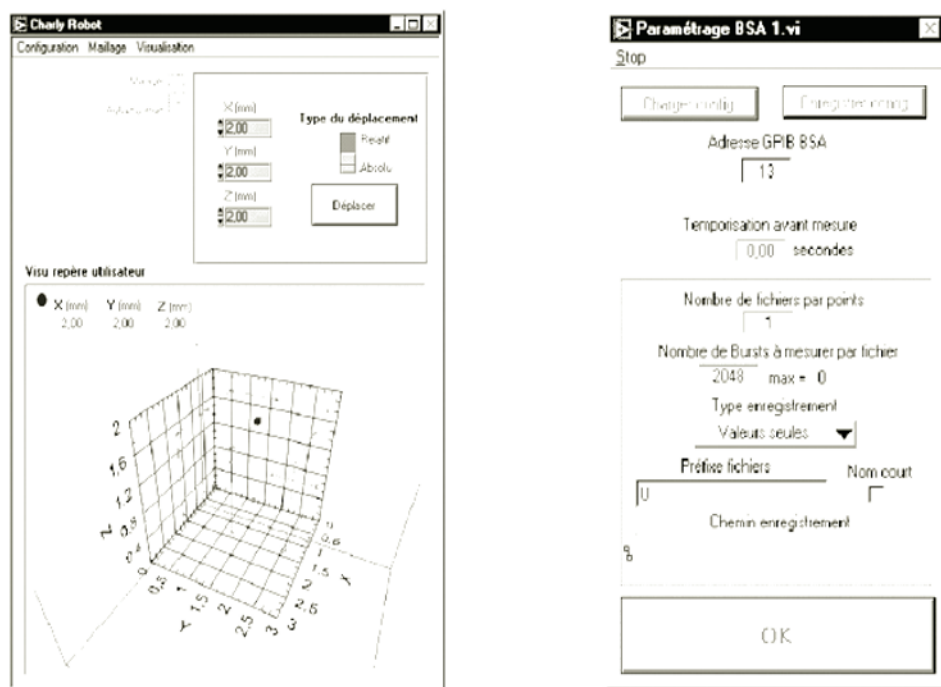


Figure 14.5 Exemples de « faces avant » de l'application avec la gestion des déplacements 3D de la tête de mesure (à gauche) et la gestion des paramètres de stockage des données (à droite).

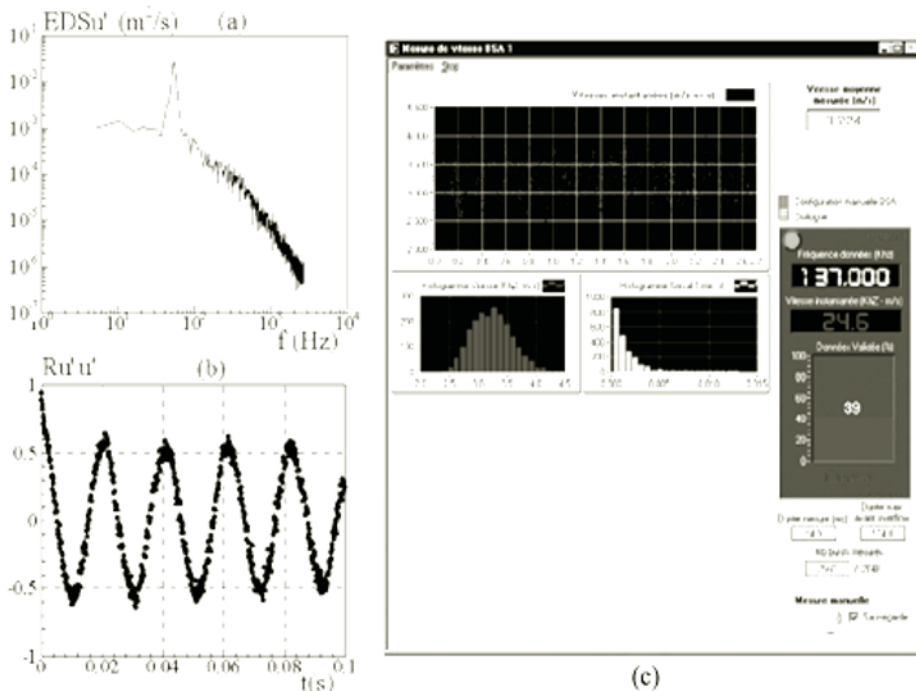


Figure 14.6 Exemples de résultats de mesure avec : (a) le spectre de fluctuations de vitesse, (b) la fonction d'auto-corrélation associée et (c) une représentation de la face avant montrant les informations de l'analyseur de spectre au cours de la mesure.

14.2.3 Conclusion

La mise en œuvre de ce programme d'acquisition et de traitement a permis de réaliser un gain considérable à la fois en souplesse d'emploi du système de vélocimétrie laser et en efficacité « globale » au niveau de l'expérimentation. La réduction du temps d'expérimentation nécessaire à l'obtention des données expérimentales est particulièrement significative et entraîne, toutes choses égales par ailleurs, une division par deux de leur coût direct d'obtention par rapport aux précédents programmes. La disponibilité de cet outil a été l'un des éléments déterminants qui a permis la constitution d'une base de données expérimentales, relative aux écoulements obtenus sur le banc et qui est actuellement utilisée pour la validation de modèles avancés de combustion en écoulements turbulents et ce, notamment dans le cadre d'un programme européen.

Cette expérimentation, développée par le groupe « combustion » du laboratoire LCD (Laboratoire de Combustion et de Détonique) du CNRS installé sur le site de l'École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique au Futuroscope, a été mis au point en partenariat étroit avec la société TecAtlant (Futuroscope).

14.3 ÉTUDE DE LA RÉPONSE VIBRATOIRE DES CLOCHES

14.3.1 Présentation générale de l'application

La cloche est un instrument de musique ancien (la plus ancienne connue est datée de plus de 3000 ans !). C'est au 16^e siècle qu'apparaissent les premiers « plans de cloches », permettant une relation empirique entre le son de la cloche, sa taille et sa géométrie, mais les notions de gammes et de notes étant encore mal définies, il faut attendre le 19^e siècle pour obtenir des relations rigoureuses entre fréquences de vibration et géométrie.

Les cloches de carillon sont obtenues par coulage de métal en fusion (généralement du bronze) dans un moule réalisé à partir d'un gabarit, lui-même calculé en fonction de la note désirée et des formules de tracé. Compte tenu des imperfections lors de la coulée, on moule les cloches de carillon plus épaisses que nécessaire et on les rectifie ensuite sur un tour en écoutant la note produite afin de n'usiner que les seuls endroits nécessaires. Cette méthode permet de corriger la dissymétrie responsable des phénomènes de battement ou « sons jumeaux ». De plus, chaque altération du profil (par exemple les inscriptions sur la cloche) modifiera de manière non uniforme les fréquences des notes partielles constituant le son de la cloche

La cloche est un instrument de la famille des percussions ; or aucun de ceux-ci n'a de note harmonique par nature, contrairement aux cordes. Mais le son d'une cloche n'est pas constitué que d'une seule note ; elle « sonne » une série de notes (au moins cinq pour les petites, huit pour les grosses) dont les intervalles de fréquence doivent être bien définis. Pour que le son soit agréable, il faut que ces intervalles entre les notes (appelées partiels) de la cloche soient des intervalles mélodiques.

La complexité du son émis par une cloche, aussi bien dans sa composition que dans sa durée, impose une analyse fine de la réponse de la cloche à la frappe. Cette analyse ne peut pas se faire avec les moyens traditionnellement employés, de type diapason électronique, essentiellement du fait de l'analyse temps-fréquence des différents partiels de la cloche. Ainsi une application d'acquisition et d'exploitation des signaux numérisés du son (microphone) ou de la vibration (accéléromètre) a été réalisé avec le langage graphique LabVIEW de la société National Instruments.

14.3.2 Application d'analyse vibratoire des cloches

Pour l'enregistrement des vibrations émises par la cloche, après des essais comparatifs, notre choix s'est porté sur un microphone électrodynamique plutôt que sur un accéléromètre, pour deux raisons :

- la position de l'accéléromètre sur la cloche est un paramètre critique à cause des nœuds de vibration de la cloche et du point d'impact de la sollicitation ;
- l'analyse doit correspondre au son « entendu » et non au son « émis ». Ce point est particulièrement important dans le cas de l'analyse d'une cloche de carillon.

Après amplification, le signal est numérisé par une carte d'acquisition de chez National Instruments (NI 6024).

L'analyse du signal a porté sur les trois domaines essentiels pour le facteur de cloches lors de l'accordage :

- l'écart en fréquence des partiels par rapport au gabarit, afin de contrôler la réponse de la cloche dans le gabarit et de mieux apprécier la note frappée ;
- la mesure des battements afin de détecter les sons jumeaux et de quantifier les écarts de fréquence ;
- l'amortissement des différentes notes et l'analyse temps-fréquence de la réponse de la cloche.

Le programme est classiquement structuré en sous-programmes permettant une exploitation simple des mesures. Nous avons ainsi les principaux modules suivants :

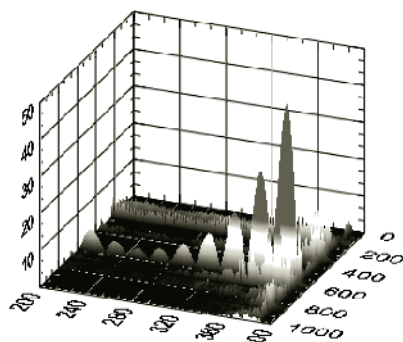
- Un programme « **Configuration** » qui, à partir des informations valeur du « La », gamme (ou octave), note de la gamme, concernant la cloche testée, paramètres accessibles en entrées sur la face avant, génère l'échelle des partiels. Il est affiché ensuite sous forme d'impulsions de Dirac sur un graphe fréquentiel.
- Un programme « **Acquisition** » qui propose le choix entre l'acquisition d'un signal issu du microphone (ou de l'accéléromètre), et la lecture d'un fichier déjà enregistré aux fins d'un post traitement. Le signal est ensuite analysé par transformée de Fourier et son spectre affiché à l'écran sous forme d'impulsions de Dirac, conjointement au spectre théorique correspondant calculé précédemment. Cette visualisation permet de détecter rapidement les défauts d'accordage.
- Un programme « **Écart en fréquence** » qui permet la mesure de l'écart en fréquence entre le modèle théorique calculé. Les différentes raies fréquentielles des partiels sont sélectionnées à l'aide d'une fenêtre dont la largeur est ajustée en fonction de la taille de la cloche. Un tableau d'indicateurs de type « leds », en face avant, regroupe les écarts pour les cinq notes principales de la cloche, ainsi que les résultats des calculs de battement et d'atténuations (accordeur électronique). La couleur de chacune des « leds » permet de voir si les partiels sont à l'intérieur du gabarit indiqué par le fondeur. Ainsi, cet affichage est une aide importante lors de l'accordage de la cloche.
- Un programme « **Atténuation** » qui a pour but de déterminer l'enveloppe de la décroissance de chacun des partiels, sélectionnés après analyse de Fourier, puis ramenés dans le domaine temporel par transformée inverse. Ces données seront utilisées dans l'analyse temps-fréquence.
- Un programme « **Mesure des battements** » qui permet de déterminer les fréquences des sons jumeaux responsables des phénomènes de battement pouvant être très proches l'une de l'autre. La méthode utilisée travaille dans le domaine temporel en détectant les passages par zéro de la fonction sinusoïdale.
- Un programme « **Représentation temps-fréquence** » qui permet d'afficher une représentation temps-fréquence de la réponse des différents partiels de la cloche sous forme d'un graphe 3D.

La face avant du programme présente les trois analyses essentielles pour le fondeur :

- L'accordeur électronique qui permet :
 - de renseigner le programme sur la cloche en étude : « La » de référence, numéro de gamme et note de la gamme ;
 - de rassembler sous forme de tableaux numériques et de tableaux de « leds » les résultats provenant de la mesure des écarts en $1/16^e$ de demi-ton, les différences de fréquence correspondant aux battements et le tableau numérique des coefficients d'atténuation.
- Le diagramme présentant l'écart aux partiels sous forme de raies fréquentielles ;
- Le diagramme d'analyse temps-fréquence, qui permet de synthétiser l'ensemble des résultats précédents par une présentation de courbe 3D (figure 14.7).

14.3.3 Conclusion

Cette application a été réalisée au sein du laboratoire LAIMAN (Laboratoire d'Instrumentation et de Matériaux d'Annecy) de l'ESIA (École Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy) en collaboration avec la société Paccard à Sevrier (74).



Représentation Temps-Fréquence

Figure 14.7 Représentation temps-fréquence obtenue lors d'une expérimentation.

14.4 ÉTUDE DES INTERFACES DANS LES MULTIMATÉRIAUX

14.4.1 Présentation générale de l'application

Dans les multimatériaux, les interfaces sont des lieux de transfert de charge, d'accommodation des sur-contraintes mécaniques et de dissipation de l'énergie. La connaissance de cette interface passe par la mesure *in situ* des phénomènes dissipatifs mésoscopiques, couplée à la modélisation par éléments finis (MEF).

Cette étude est basée sur une expérience pour appréhender le comportement visco-élastique de l'interface d'un multimatériau composite soumis à une excitation mécanique. Les résultats obtenus par la mesure permettent d'affiner les paramètres de la modélisation.

Pour des raisons de simplicité (connaissance du matériau, banc de mesure), l'étude porte sur un multimatériau composite de type âme mousse + renforts à fibre de verre unidirectionnel, réalisé sous forme de poutre. À l'interface située entre deux plis de renfort sont collés des éléments piézoélectriques (PVDF). Ces films piézoélectriques, d'épaisseur ($25\text{ }\mu\text{m}$) et de caractéristiques mécaniques proches de celles des colles d'assemblage des multimatériaux, servent à la fois de capteurs de mesure des contraintes et d'actionneurs permettant de générer, localement, de faibles variations de contraintes d'interface (figure 14.8).

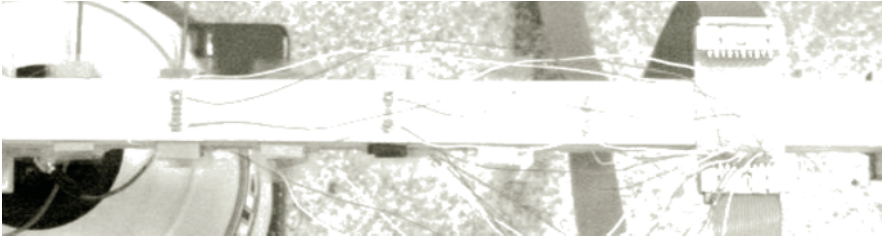


Figure 14.8 Éprouvette instrumentée.

14.4.2 Banc expérimental de l'application

La mesure de la tension, générée par les éléments piézoélectriques, permet de connaître la contrainte à laquelle ils sont soumis. C'est la connaissance simultanée de cette contrainte et de la déformation qui permet d'ajuster les paramètres de la modélisation. Afin de pouvoir déterminer ces différents paramètres, des séries de mesures sont effectuées en imposant des potentiels de masse sur une des faces (extérieure ou intérieure) des deux séries de films piézoélectriques (supérieure ou inférieure).

Le banc expérimental permet l'étude de la poutre encastree ou libre en soumettant son extrémité libre à une sollicitation mécanique (figure 14.9). Ce banc doit



Figure 14.9 Banc expérimental avec le pot vibrant en bas à gauche de la photo.

permettre de réaliser des essais de vibration, soit libre, soit en régime harmonique. Dans ce dernier cas, la poutre est mise en vibration par un « pot vibrant » piloté par un générateur sinusoïdal, via un amplificateur de puissance. Ce vibreur permet d'appliquer des forces jusqu'à 98 N et des accélérations jusqu'à 981 m.s^{-2} . Pour une bonne isolation vibratoire, l'ensemble de la structure est fixé sur un socle massif en granit reposant sur des pieds pneumatiques.

L'alimentation haute tension permet d'obtenir une tension sinusoïdale d'amplitude et de fréquence variable, dans les gammes 0/2 kV crête/crête et 0/3 kHz. Cette alimentation est pilotée par un signal issu du générateur de fonctions utilisé également pour l'excitation mécanique.

14.4.3 Acquisition et traitement de données des expériences

Après conditionnement, les signaux issus des éléments piézoélectriques, de la tête d'impédance (force et accélération) et du capteur de déplacement sont numérisés par une carte National Instruments (NI 6024). Les signaux issus des ponts de jauges, après conditionnement, sont numérisés par une carte National Instruments (NI 6014). Le choix de deux cartes séparées, résultat d'une version antérieure du banc, impose une structure particulière au programme

En effet, dans cette expérimentation, le nombre de voies d'acquisition est relativement important (10 capteurs piézoélectriques, 3 ponts de Wheatstone, force, accélération et déplacement en extrémité de poutre) et nécessite deux cartes d'acquisition. La nécessité de réaliser une acquisition synchrone sur l'ensemble des capteurs conduit à une scrutation « choppée » des deux cartes. Il est prévu de piloter le générateur de fonction via une carte GPIB, de façon à pouvoir imposer des variations programmées de la sollicitation de la poutre.

D'autre part, le banc de mesure est une ressource commune à plusieurs équipes de recherche, dont une pour les tests en vibrations de photodétecteurs embarqués sur des satellites, et son instrumentation a été réalisée de façon à offrir la plus grande souplesse d'utilisation possible.

Une boîte de dialogue permet de renseigner les fichiers sur les paramètres de l'essai (fréquences et amplitudes du signal sinusoïdal de pilotage, durées d'acquisition) (figure 14.10).

Ce programme, réalisé avec le langage graphique labVIEW, génère les signaux nécessaires au fonctionnement et au contrôle du pot vibrant via une interface GPIB. L'enregistrement des mesures est faite par un sous-programme spécifique, appelé « **Acquisition** », permettant de gérer les deux cartes d'acquisition.

Les données issues des capteurs piézoélectriques, des jauges de déformation et des capteurs de la tête d'impédance (force et accélération) peuvent être affichées sur la face avant de ce sous-programme, pour contrôle dans cette phase de mesure (ouverture de la face avant) en particulier lors de la mise au point, et sont sauvegardées dans des fichiers de format Excel pour exploitation ultérieure.

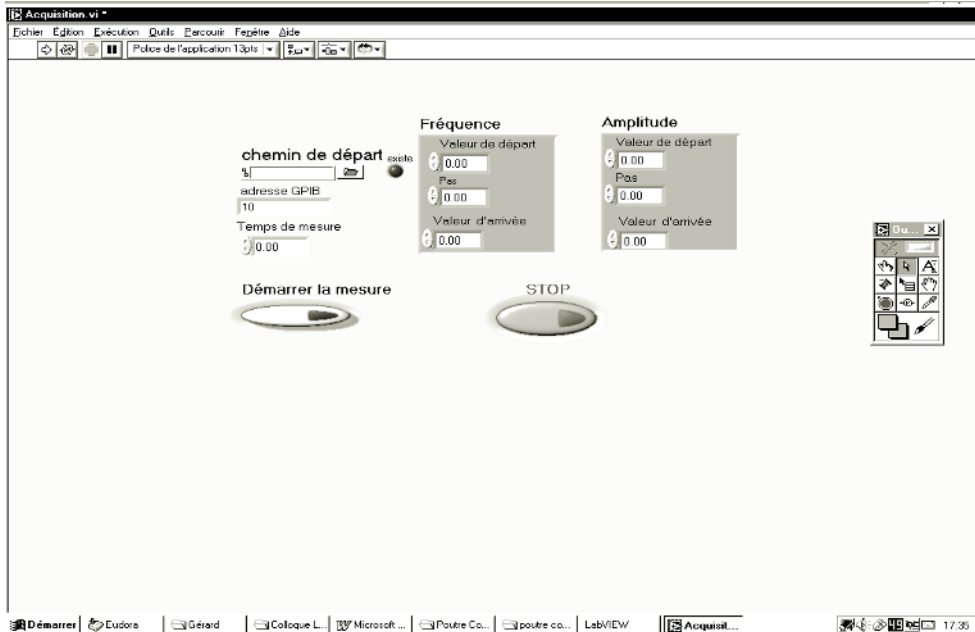


Figure 14.10 Face avant du programme de pilotage.

Le diagramme du sous-programme d'acquisition permettant d'enregistrer les signaux issus des films piézoélectriques et des différents capteurs est représenté sur la figure 14.11.

La figure 14.12 visualise les réponses de quatre éléments piézoélectriques supérieurs pour une sollicitation de 20Hz et de 40 Hz, à amplitude et gain constants. Ces courbes sont obtenues à partir des tableaux Excel générés lors de l'acquisition des mesures.

Les premiers résultats permettent de voir que la dissipation énergétique aux interfaces s'effectue de manière différente en fonction de la fréquence de sollicitation et de la position du capteur par rapport à l'encastrement de la poutre. Une exploration plus fine de ces phénomènes est en cours de réalisation, afin de préciser s'il existe un « effet de seuil » dans la modification des dissipations.

14.4.4 Conclusion

Cette application a été réalisée au sein des deux laboratoires :

- LAIMAN (Laboratoire d'Instrumentation et de Matériaux d'Annecy) de l'ESIA (Ecole Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy) ;
- LOCIE (Laboratoire d'Optimisation de la Conception et Ingénierie de l'Environnement) de l'ESIGEC (Ecole Supérieur d'ingénieurs de Chambéry, Le Bourget le Lac).

Ces travaux ont donné lieu à une collaboration en cours avec une université canadienne sur les problèmes d'interface neige-câble électrique.

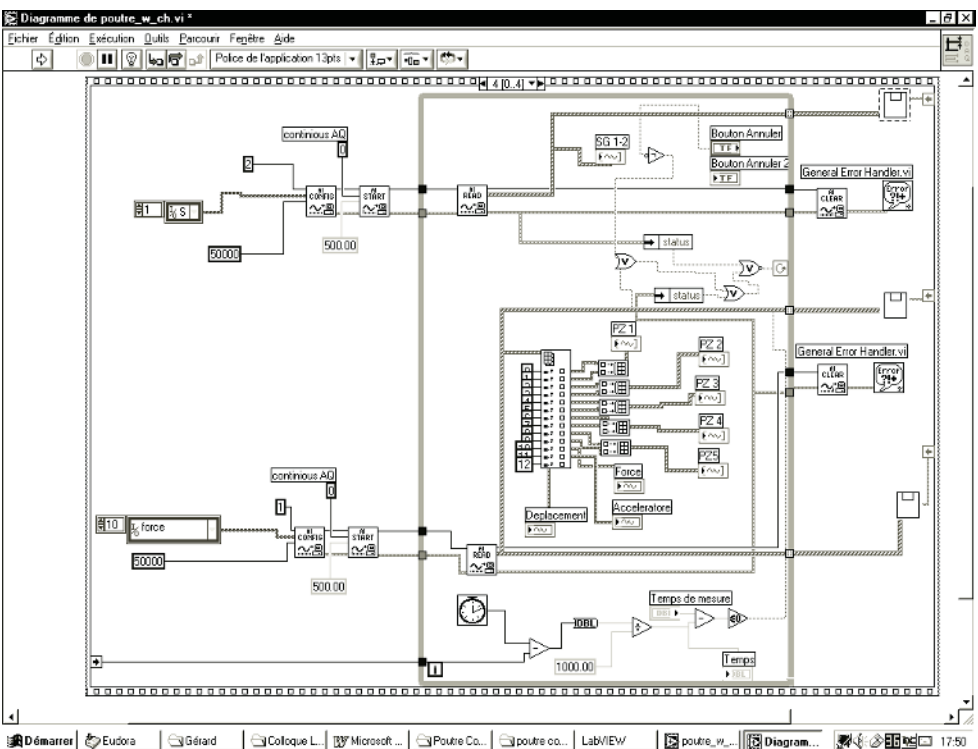


Figure 14.11 Diagramme du programme de pilotage réalisé avec le langage graphique LabVIEW.

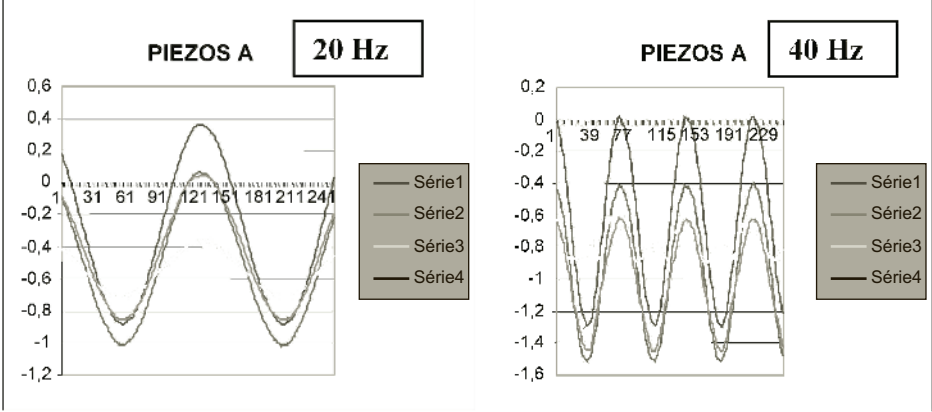


Figure 14.12 Réponse des piézoélectriques de l'application en cours d'expérimentation.

PARTIE 4

ANNEXES

Annexe A

Distribution de Dirac

A.1 DÉFINITIONS

L'impulsion de Dirac ou la distribution de Dirac peuvent être vues comme un outil symbolique permettant de formuler des expressions. L'impulsion de Dirac ou pic de Dirac, notée δ , peut être perçue comme la limite d'une impulsion d'amplitude A et de durée $1/A$ lorsque A tend vers l'infini. L'aire de cette impulsion est constante et égale à 1 quel que soit A . Le pic de Dirac sera défini comme ayant un poids ou une « masse » de 1 en $x = 0$ (figure A.1). Dans le domaine du traitement du signal, le pic de Dirac $\delta(x)$ est une distribution ou « fonction » qui vérifie :

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot dx = 1$$

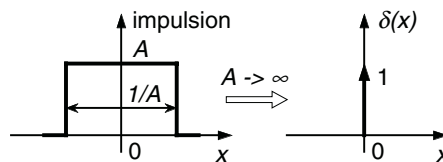


Figure A.1. Représentation de l'impulsion ou pic de Dirac.

Utilisé pour la démonstration de l'échantillonnage des signaux, le « *peigne* » de Dirac, qui s'écrit $\text{Pgn}_A(x)$, est une suite de pics de Dirac régulièrement espacés de A , appelé période du « *peigne* » de Dirac. Soit la relation de définition (figure A.2) :

$$\text{Pgn}_A(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k \cdot A)$$

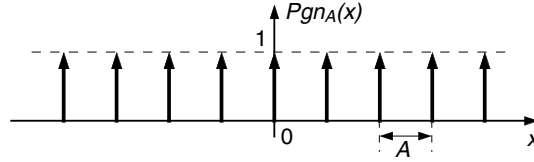


Figure A.2. Représentation d'un peigne de Dirac.

A.2 PRINCIPALES PROPRIÉTÉS

Il est important de souligner que, pour des raisons de facilité, les opérations décrites ci-après utilisent des notations identiques à celles utilisées pour les fonctions bien que nous soyons dans le domaine des distributions.

a) Propriétés de localisation (opération de « produit »)

Pour une fonction $f(x)$, on a les relations suivantes :

$$f(x) \cdot \delta(x) = f(0) \cdot \delta(x) \quad : \text{pic de Dirac de poids } f(0) \text{ en } 0$$

et

$$f(x) \cdot \delta(x - a) = f(a) \cdot \delta(x - a) \quad : \text{pic de Dirac de poids } f(a) \text{ en } a$$

Pour deux pics de Dirac, le produit n'est pas défini ; mais nous poserons les relations suivantes :

$$[A \cdot \delta(x - a)] \cdot [B \cdot \delta(x - b)] = 0 \quad \text{si } a \neq b$$

et

$$[A \cdot \delta(x - a)] \cdot [B \cdot \delta(x - b)] = A \cdot B \cdot \delta(x - a) \quad \text{si } a = b$$

b) Propriétés d'élément neutre (opération de « convolution »)

Pour une fonction $f(x)$, on a les relations suivantes :

$$f(x) * \delta(x) = f(x) \quad : \text{fonction } f(x)$$

et

$$f(x) * \delta(x - a) = f(x - a) \quad : \text{fonction } f(x) \text{ traduite de } a$$

Pour deux pics de Dirac, le produit de convolution n'est pas défini ; mais nous poserons la relation suivante :

$$[A \cdot \delta(x - a)] * [B \cdot \delta(x - b)] = A \cdot B \cdot \delta(x - b - a)$$

c) Propriétés d'échantillonnage avec le peigne de Dirac (produit)

Pour une fonction $f(x)$, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} f(x) \cdot \text{Pgn}_A(x) &= f(x) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kA) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x - kA) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(A) \cdot \delta(x - kA) \end{aligned}$$

Ainsi le peigne de Dirac échantillonne la fonction $f(x)$ aux abscisses où il existe.

d) Propriétés de périodisation avec le peigne de Dirac (convolution)

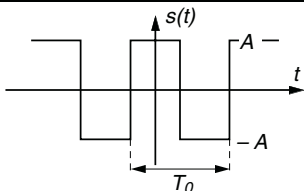
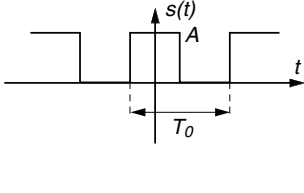
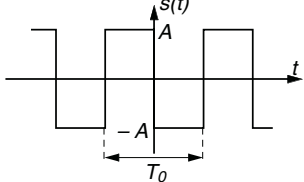
Pour une fonction $f(x)$, on a la relation suivante :

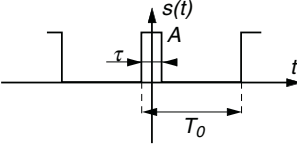
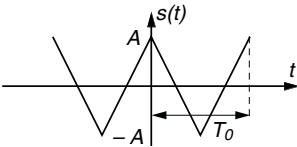
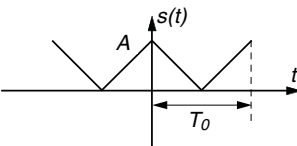
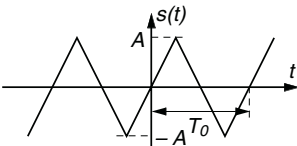
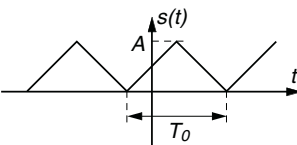
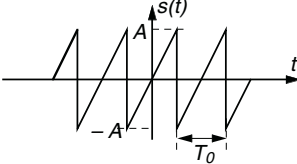
$$f(x) * \text{Pgn}_A(x) = f(x) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kA) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x) * \delta(x - kA) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - kA)$$

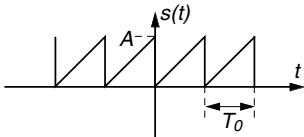
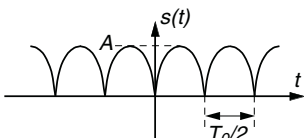
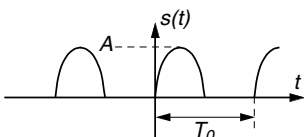
Ainsi le peigne de Dirac périodise la fonction $f(x)$ avec une période A égale à l'intervalle entre les pics de Dirac.

Annexe B

Développements en série de Fourier

Série de Fourier (représentation spectrale bilatérale)	Représentation graphique de la fonction
signal carré pair à composante continue nulle : $S(f) = \frac{2 \cdot A}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cdot \delta(f - (2n+1) \cdot F_0)$ avec T_0 (période) : $F_0 = 1/T_0$	
signal carré pair à composante continue non nulle : $S(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f) + \frac{A}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cdot \delta(f - (2n+1) \cdot F_0)$ avec T_0 (période) : $F_0 = 1/T_0$	
signal carré impair à composante continue nulle : $S(f) = \frac{2 \cdot A}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{(2n+1)} \cdot \delta(f - (2n+1) F_0)$ avec T_0 (période) : $F_0 = 1/T_0$	

Série de Fourier (représentation spectrale bilatérale)	Représentation graphique de la fonction
signal impulsionnel pair à composante continue non nulle : $S(f) = \frac{A\tau}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\sin(\pi n F_0 \tau)}{\pi n F_0 \tau} \cdot \delta(f - n F_0)$ avec T_0 (période) : $F_0 = 1/T_0$	
signal triangulaire pair à composante continue nulle : $S(f) = \frac{4 \cdot A}{\pi^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0)$ avec T_0 (période) : $F_0 = 1/T_0$	
signal triangulaire pair à composante continue non nulle : $S(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f) + \frac{2 \cdot A}{\pi^2} \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0)$ avec T_0 (période) : $F_0 = 1/T_0$	
signal triangulaire impair à composante continue nulle : $S(f) = \frac{j \cdot 4 \cdot A}{\pi^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0)$ avec T_0 (période) : $F_0 = 1/T_0$	
signal triangulaire à composante continue non nulle : $S(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f) + \frac{j \cdot 2 \cdot A}{\pi^2} \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \delta(f - (2n+1)F_0)$ avec T_0 (période) : $F_0 = 1/T_0$	
signal rampe à composante continue nulle : $S(f) = \frac{j \cdot A}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \delta(f - n F_0)$ avec T_0 (période) : $F_0 = 1/T_0$	

Série de Fourier (représentation spectrale bilatérale)	Représentation graphique de la fonction
• signal rampe à composante continue non nulle : $S(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f) + \frac{j \cdot A}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{n=+\infty} \frac{1}{n} \cdot \delta(f - nF_0)$ avec T_0 (période) : $F_0 = 1/T_0$	
• signal sinusoïdal redressé double alternance : $S(f) = \frac{2A}{\pi} \delta(f) - \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} \cdot \delta(f - 2nF_0)$ avec $T_0/2$ (période) : $F_0 = 1/T_0$	
• signal sinusoïdal redressé simple alternance : $S(f) = \frac{A}{\pi} \delta(f) - \frac{jA}{4} \delta(f - F_0) - \frac{2A}{\pi} \times \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} \cdot \delta(f - 2nF_0)$ avec T_0 (période) : $F_0 = 1/T_0$	

Annexe C

Transformées de Fourier

Fonction	Transformée de Fourier
$s(t) = e^{-\pi \cdot t^2}$	$S(f) = e^{-\pi f^2}$
$s(t) = e^{-a \cdot t^2}$	$S(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{\pi^2 f^2}{a}}$
$s(t) = e^{-a \cdot t }$ avec $a > 0$	$S(f) = \frac{2 \cdot a}{a^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2}$
$s(t) = \frac{2 \cdot a}{a^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot t^2}$ avec $a > 0$	$S(f) = e^{-a \cdot f }$
$s(t) = \frac{1}{1 + t^2}$	$S(f) = \pi \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot f }$
$s(t) = A \cdot \Pi_{\tau}(t)$ avec $\Pi_{\tau}(t) = 1$ pour $t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right]$ et $\Pi_{\tau}(t) = 0$ pour $t \notin \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right]$	$S(f) = A \cdot \tau \cdot \frac{\sin(\pi \cdot \tau \cdot f)}{\pi \cdot \tau \cdot f}$
$s(t) = A \cdot F_0 \cdot \frac{\sin(\pi \cdot F_0 \cdot t)}{\pi \cdot F_0 \cdot t}$	$s(f) = A \cdot \Pi_{F_0}(f)$ avec $\Pi_{F_0}(f) = 1$ pour $f \in \left[-\frac{F_0}{2}, \frac{F_0}{2}\right]$ et $\Pi_{F_0}(f) = 0$ pour $f \notin \left[-\frac{F_0}{2}, \frac{F_0}{2}\right]$

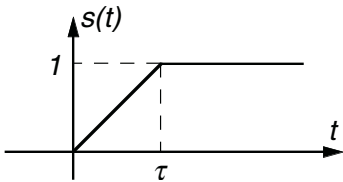
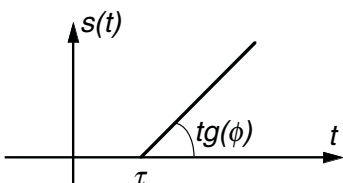
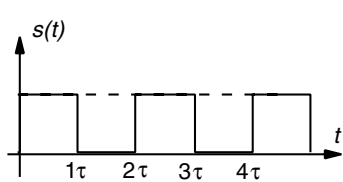
Fonction	Transformée de Fourier
$s(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot t)$	$S(f) = \frac{1}{2} \cdot [\delta(f + F_0) + \delta(f - F_0)]$
$s(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot t)$	$S(f) = \frac{j}{2} \cdot [\delta(f + F_0) - \delta(f - F_0)]$
$s(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot t) \cdot \Pi_\tau(t)$	$S(f) = \frac{A \cdot \tau}{2} \times \left[\frac{\sin(\pi \cdot \tau \cdot (f + F_0))}{\pi \cdot \tau \cdot (f + F_0)} + \frac{\sin(\pi \cdot \tau \cdot (f - F_0))}{\pi \cdot \tau \cdot (f - F_0)} \right]$
$s(t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot t) \cdot \Pi_\tau(t)$	$S(f) = \frac{j \cdot A \cdot \tau}{2} \times \left[\frac{\sin(\pi \cdot \tau \cdot (f + F_0))}{\pi \cdot \tau \cdot (f + F_0)} - \frac{\sin(\pi \cdot \tau \cdot (f - F_0))}{\pi \cdot \tau \cdot (f - F_0)} \right]$
$s(t) = \cos(a \cdot t^2)$	$S(f) = A \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \left[\cos\left(-\frac{(\pi \cdot f)^2}{a}\right) + \frac{\pi}{4} \right]$
$s(t) = \sin(a \cdot t^2)$	$S(f) = A \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \left[\cos\left(-\frac{(\pi \cdot f)^2}{a}\right) - \frac{\pi}{4} \right]$
$s(t) = u(t)$ (fonction échelon unité)	$S(f) = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f)$
$s(t) = \operatorname{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$ (fonction signe)	$S(f) = \frac{1}{j \cdot \pi \cdot f}$
$s(t) = \frac{d(\operatorname{sgn}(t))}{dt} = 2 \cdot \delta(t)$ (dérivée de la fonction signe)	$S(f) = 2$
$s(t) = A \cdot u(t) \cdot e^{-a \cdot t}$ avec $a > 0$	$S(f) = \frac{A}{a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$
$s(t) = A \cdot u(t) \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$ avec $a > 0$ et $b > 0$	$S(f) = \frac{A \cdot (b - a)}{(a + j2\pi f) \cdot (b + j2\pi f)}$
$s(t) = A \cdot u(t) \cdot \cos(2\pi F_0 t) \cdot e^{-at}$ avec $a > 0$	$S(f) = \frac{A \cdot (a + 2\pi f)}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi F_0)^2}$
$s(t) = A \cdot u(t) \cdot \sin(2\pi F_0 t) \cdot e^{-at}$ avec $a > 0$	$S(f) = \frac{A \cdot (2\pi F_0)}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi F_0)^2}$
$s(t) = A \cdot u(t) \cdot \cos(2\pi F_0 t)$	$S(f) = \frac{A}{4} \left\{ \delta(f + F_0) + \delta(f - F_0) + \frac{2f}{j\pi(f^2 - F_0^2)} \right\}$

Fonction	Transformée de Fourier
$s(t) = A \cdot u(t) \cdot \sin(2\pi F_0 t)$	$S(f) = \frac{jA}{4} \left\{ \delta(f + F_0) - \delta(f - F_0) + \frac{2jf}{\pi(f^2 - F_0^2)} \right\}$
$s(t) = A \cdot \Lambda_{2\tau}(t)$ avec $\Lambda_{2\tau}(t) = 1 + \frac{t}{\tau}$ pour $t \in [-\tau, 0]$ et $\Lambda_{2\tau}(t) = 1 - \frac{t}{\tau}$ pour $t \in [0, \tau]$ et $\Lambda_{2\tau}(t) = 0$ pour $t \notin [-\tau, \tau]$	$S(f) = A \cdot \tau \cdot \left[\frac{\sin(\pi \cdot \tau \cdot f)}{\pi \cdot \tau \cdot f} \right]^2$
$s(t) = A$	$S(f) = A \cdot \delta(f)$
$s(t) = A \cdot \delta(t)$	$S(f) = A$
$s(t) = A \cdot e^{-j2\pi \cdot F_0 \cdot t}$	$S(f) = A \cdot \delta(f - F_0)$
$s(t) = A \cdot \delta(t - T_0)$	$S(f) = A \cdot e^{-j2\pi \cdot T_0 \cdot f}$
$s(t) = \text{Pgn}_{T_0}(t)$ $= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_0)$	$S(f) = F_0 \cdot \text{Pgn}_{F_0}(f) = F_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot F_0)$
$s(t) = T_0 \cdot \text{Pgn}_{T_0}(t)$ $= T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_0)$	$S(f) = \text{Pgn}_{F_0}(f)$ $= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot F_0)$

Annexe D

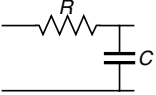
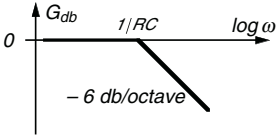
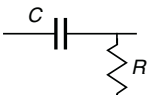
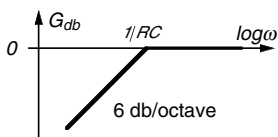
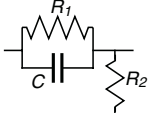
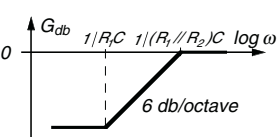
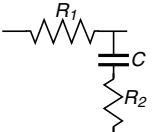
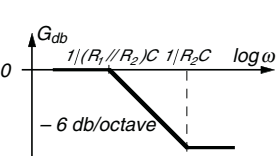
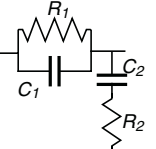
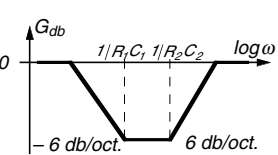
Transformées de Laplace

Fonction	Transformée de Laplace
$s(t) = A \cdot e^{-a \cdot t}$	$S(p) = \frac{A}{p + a}$
$s(t) = A \cdot t \cdot e^{-a \cdot t}$	$S(p) = \frac{A}{(p + a)^2}$
$s(t) = A \cdot \sin(2\pi F_0 t)$	$S(p) = \frac{A \cdot (2\pi F_0)}{p^2 + (2\pi F_0)^2}$
$s(t) = A \cdot \cos(2\pi F_0 t)$	$S(p) = \frac{A \cdot p}{p^2 + (2\pi F_0)^2}$
$s(t) = A \cdot e^{-at} \cdot \sin(2\pi F_0 t)$	$S(p) = \frac{A \cdot (2\pi F_0)}{(p + a)^2 + (2\pi F_0)^2}$
$s(t) = A \cdot e^{-at} \cdot \cos(2\pi F_0 t)$	$S(p) = \frac{A \cdot (p + a)}{(p + a)^2 + (2\pi F_0)^2}$
$s(t) = A \cdot \sin^2(2\pi F_0 t)$	$S(p) = \frac{2 \cdot A \cdot (2\pi F_0)^2}{p \cdot (p^2 + 4 \cdot (2\pi F_0)^2)}$
$s(t) = A \cdot \cos^2(2\pi F_0 t)$	$S(p) = \frac{p^2 + 2 \cdot A \cdot (2\pi F_0)^2}{p \cdot (p^2 + 4 \cdot (2\pi F_0)^2)}$
$s(t) = A$	$S(p) = \frac{A}{p}$

Fonction	Transformée de Laplace
$s(t) = A \cdot [u(t - a) - u(t - b)]$ ou $s(t) = A$ pour $t \in [a, b]$	$S(p) = \frac{A}{p} \cdot [e^{-ap} - e^{-bp}]$
$s(t) = \frac{A \cdot t}{\theta}$ pour $t \in [0, \theta]$ et $s(t) = A$ pour $t \in [\theta, +\infty]$	$S_r(p) = A \cdot \frac{1 - e^{-p\theta}}{p^2 \cdot \theta}$
	$S(p) = \frac{1 - e^{-p \cdot \tau}}{p^2 \cdot \tau}$
 soit : $s(t) = \tan(\varphi) \cdot t \cdot u(t - \tau)$	$S(p) = \frac{\tan(\varphi)}{p^2} \cdot e^{-p \cdot \tau}$
	$S(p) = \frac{1}{p \cdot (1 + e^{-p \cdot \tau})}$

Annexe E

Fonctions de Transfert

Réseau et courbe de gain	Fonction de transfert
 	$H(p) = \frac{1}{1 + RCp}$
 	$H(p) = \frac{RCp}{1 + RCp}$
 	$H(p) = R_2 \cdot \frac{1 + R_1 Cp}{1 + R_1 Cp + \frac{R_1}{R_2}}$
 	$H(p) = \frac{1 + R_2 Cp}{1 + R_1 Cp + R_2 Cp}$
 	$H(p) = \frac{(1 + R_1 C_1 p) \cdot (1 + R_2 C_2 p)}{(1 + R_1 C_1 p) \cdot (1 + R_2 C_2 p) + R_1 C_2 p}$

Annexe F

Transformée en z

F.1 DÉFINITION

Soit le signal causal $s(t)$ échantillonné à la fréquence F_e , le signal échantillonné s'exprime par :

$$s_e(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

La transformée de Laplace $S(p)$ de ce signal échantillonné causal $s_e(t)$, obtenue en remplaçant $j2\pi f$ par p dans la transformée de Fourier, est :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s_e(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) \right] \cdot e^{-pt} \cdot dt$$

Étant donné les propriétés de $\delta(t)$, il vient :

$$S(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot e^{-pkT_e}$$

En effectuant le changement de variables $z = e^{pT_e}$, nous trouvons la transformée en z du signal $s(t)$ définie par la relation suivante :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \cdot z^{-k}$$

F.2 PROPRIÉTÉS

a) *Propriété de linéarité*

si

$$x(t) \xrightarrow{z} X(z) \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow{z} Y(z)$$

alors

$$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \xrightarrow{z} a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$$

b) *Retard temporel*

si

$$s(t) \xrightarrow{z} S(z)$$

alors

$$s(t - mT_e) \xrightarrow{z} S(z) \cdot z^{-m}$$

en particulier

$$s(t - T_e) \xrightarrow{z} S(z) \cdot z^{-1}$$

Annexe G

Principaux montages de l'amplificateur opérationnel

G.1 DÉFINITION ET UTILISATION EN BOUCLE FERMÉE

L'amplificateur opérationnel ou circuit intégré linéaire est un amplificateur différentiel linéaire, à grand gain, à grande impédance d'entrée et à faible impédance de sortie. Sa tension de sortie est une fonction linéaire de la différence des tensions appliquées à ses deux entrées (figure G.1) :

$$V_s = A \cdot (V_2 - V_1) = A \cdot V_e$$

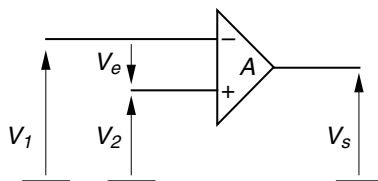


Figure G.1. Schéma de principe d'un amplificateur opérationnel.

Le gain en boucle ouverte A est très grand ($\approx 10^5$), aussi ce circuit s'utilise le plus souvent en boucle fermée, c'est-à-dire avec une contre-réaction entre l'entrée (-) et la sortie.

Considérons le schéma de base d'un amplificateur monté avec une résistance R_{cr} en contre-réaction et une résistance R_e en entrée (figure G.2). On a les quatre relations tensions/courants déduites du schéma électrique :

$$\left| \begin{array}{l} V_s = -A \cdot \varepsilon \end{array} \right. \quad (1)$$

$$V_s - \varepsilon = -R_{cr} \cdot i_s \quad (2)$$

$$\varepsilon - V_e = -R_e \cdot i_e \quad (3)$$

$$i_e = i_s + i_d \quad (4)$$

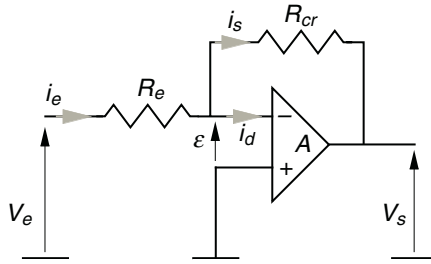


Figure G.2. Montage de l'amplificateur opérationnel en boucle fermée.

La résistance d'entrée étant très grande ($\approx$ qq $M\Omega$) comparée à R_{cr} ou R_e ($\approx$ qq $10\text{ k}\Omega$), le courant d'entrée i_d est considéré comme nul car $\varepsilon \ll V_s$:

$$i_d \approx 0 \Rightarrow i_e = i_s$$

d'où la relation entre V_s et V_e :

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_{cr}}{R_e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_{cr}}{A}}$$

Le rapport R_{cr}/R_e (< 1000) étant très inférieur au gain A ($\approx 10^5$), la relation devient :

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_{cr}}{R_e}$$

L'amplificateur opérationnel se présente alors comme un amplificateur inverseur à gain constant déterminé par deux résistances dans les limites de sa bande passante. Les équations permettent de considérer la tension ε entre l'entrée (-) et la masse comme nulle, ce point est appelé *masse virtuelle*. D'une manière générale, en considérant une impédance de contre-réaction Z_{cr} et une impédance d'entrée Z_e , on a la relation :

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{Z_{cr}}{Z_e}$$

G.2 AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL MONTÉ EN SOMMATEUR DE TENSIONS

L'amplificateur opérationnel peut être utilisé comme sommateur de tensions (figure G.3). Le courant d'entrée de l'amplificateur pouvant être considéré comme nul, la somme des courants d'entrée i_j est équilibrée par le courant de bouclage i_s :

$$i_s = \sum_j i_j \quad \text{ou encore} \quad \frac{V_s}{R_{cr}} = \sum_j \frac{V_j}{R_j}$$

Dans le cas particulier de la figure G.3, on fait l'addition des trois tensions V_1 , V_2 et V_3 et on les multiplie respectivement par le scalaire R_{cr}/R_1 , R_{cr}/R_2 et R_{cr}/R_3 . Soit :

$$V_s = - \left[V_1 \cdot \frac{R_{cr}}{R_1} + V_2 \cdot \frac{R_{cr}}{R_2} + V_3 \cdot \frac{R_{cr}}{R_3} \right]$$

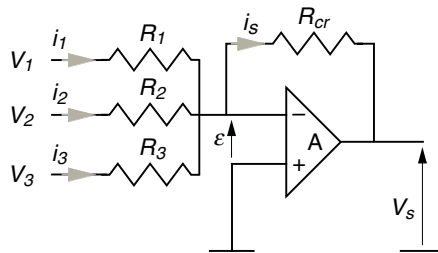


Figure G.3. Amplificateur opérationnel monté en sommateur de tensions.

G.3 AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL MONTÉ EN INTÉGRATEUR

L'impédance montée en contre-réaction est une capacité C et l'impédance d'entrée une résistance R (figure G.4, page suivante). Les relations électriques sont :

$$\begin{cases} i_e = i_s = \frac{V_e}{R} \\ i_s = C \cdot \frac{dV_s}{dt} \end{cases}$$

d'où on déduit :

$$V_s = -\frac{1}{RC} \cdot \int V_e \cdot dt$$

Si la tension V_e est constante, la tension de sortie obtenue est une rampe de tension :

$$V_s = -K \cdot t \quad \text{avec} \quad K = \frac{V_e}{RC}$$

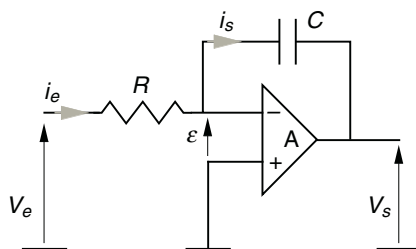


Figure G.4. Amplificateur opérationnel monté en intégrateur.

G.4 AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL MONTÉ EN COMPAREUR

Dans le cas de cette utilisation, l'amplificateur opérationnel est monté en boucle ouverte (figure G.5). Il s'agit de comparer une tension continue de référence V_{ref} à une autre tension variable dans le temps V_e . La tension V_s est donc :

$$V_s = A \cdot (V_{\text{ref}} - V_e)$$

Le circuit étant alimenté par deux tensions symétriques continues $\pm V_a$, la tension de sortie passe très rapidement de $+V_a$ à $-V_a$ ou de $-V_a$ à $+V_a$ suivant la position des deux tensions d'entrée :

$$\left| \begin{array}{ll} \text{si } V_e < V_{\text{ref}} & \text{alors } V_s = +V_a \\ \text{si } V_e > V_{\text{ref}} & \text{alors } V_s = -V_a \end{array} \right.$$

Ce montage permet donc de connaître sous forme logique la position de deux tensions l'une par rapport à l'autre. Ce type de circuit existe avec une sortie directement compatible TTL.

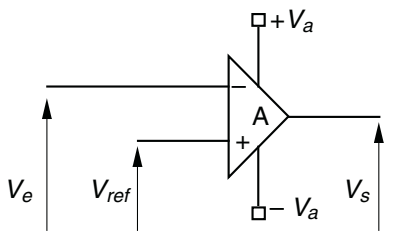


Figure G.5. Amplificateur opérationnel monté en comparateur.

Annexe H

Le logiciel d'instrumentation LabVIEW™

H.1 INTRODUCTION

Le langage de programmation graphique, appelé LabVIEW pour « Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench » est un environnement de programmation à caractère universel particulièrement bien adapté à la mesure, au test, à l'instrumentation et à l'automatisation. Un logiciel d'automatisation pourrait être défini comme un programme permettant de contrôler et commander un processus physique externe allant du simple capteur ou actionneur à la chaîne de fabrication.

Le temps nécessaire à l'assemblage d'un système de mesure ou de contrôle/commande est en général négligeable par rapport à celui nécessaire à sa programmation dans un langage classique (C, Pascal, Ada...). Les interfaces utilisateurs, développées avec ces langages, sont le plus souvent obscures et incompréhensibles. Les utilisateurs disposent avec LabVIEW d'un outil intégré d'acquisition, d'analyse et de présentation des données, une solution qui entraîne un gain notable de productivité comparable à celui obtenu par l'introduction des tableurs dans les logiciels financiers. L'environnement LabVIEW offre la souplesse et la puissance d'un langage de programmation sans les difficultés ni la complexité correspondante puisque sa méthode de programmation graphique fonctionnelle est naturellement familière aux ingénieurs.

LabVIEW est un des premiers langages de programmation graphique destinés au développement d'applications d'instrumentation. Couplé à des cartes d'entrées-sorties, il permet de gérer des flux d'informations numériques ou analogiques et de créer ou de simuler des instruments de mesures (oscilloscope, compteur d'impulsions, multimètre...). Ce langage a été développé par la société National Instruments à partir de 1983. Initialement conçu pour une plate-forme MacOS dans la première

version distribuée en 1986, l'environnement de programmation LabVIEW est porté sur plate-forme Windows dès 1992. Dans sa version 8.5, le logiciel est actuellement disponible sur de nombreuses plates-formes : Windows, MacOS et Linux. La portabilité des applications développées sous LabVIEW est totale entre les différentes plates-formes, exceptée pour la gestion des cartes d'entrées/sorties qui peuvent comporter des spécificités liées à une machine.

Le langage LabVIEW est un environnement complet de conception et de réalisation à la fois souple et puissant, le but étant de favoriser l'approche intuitive du programmeur ou de l'utilisateur. Pour cela, le langage utilise toute la convivialité des interfaces interactives des micro-ordinateurs actuels en fournissant des objets proches graphiquement des objets réels (voyants, curseurs, interrupteurs, boutons, graphes...) ainsi que des outils familiers et simples d'utilisation pour la programmation (structures de programmation, fonctions arithmétiques, fonctions logiques, comparateurs...). Le langage LabVIEW propose un environnement destiné à l'instrumentation où l'on retrouve les quatre fonctions de base nécessaires à ces applications industrielles :

- *acquisition et restitution de données* : contrôle d'instruments (GPIB, série, VXI), gestion de cartes d'entrées/sorties numériques/analogiques, gestion de cartes d'acquisition d'images, commande d'axes moteurs ;
- *analyse et traitement des données* : traitement du signal (génération, filtrage, FFT...), traitement statistique (régression, lissage, moyenne...) ;
- *présentation et stockage des données* : affichage (courbes, graphiques 2D...), stockage des données (archivage, impression) ;
- *exportation des données* : échange de données (Active X...), gestion d'un réseau (TCP/IP, Internet, FieldBus, série...).

H.2 LES CONCEPTS DE BASE DE LABVIEW

L'environnement LabVIEW propose donc un cadre de programmation graphique flux de données enrichie de deux extensions : mémorisation et structures de programmation. Ce langage de programmation, appelé *langage G*, possède la même puissance d'expression que les langages impératifs textuels classiques comme C ou Ada (*bibliographie* : Cottet 2001).

a) *Instrument virtuel*

Si l'on réalise qu'un programme de mesure est un instrument de mesure que l'on contrôle à partir d'un ordinateur au lieu d'un ensemble de boutons, cela conduit logiquement à la notion d'instrument virtuel (instrument réel simulé sur ordinateur). Un instrument virtuel est un module de programme qui présente une interface sous forme graphique pour l'apparenter à un instrument physique. Dans LabVIEW, les utilisateurs manipulent des instruments virtuels comme s'il s'agissait d'instruments réels. Une application, développée sous LabVIEW, est donc appelée *Instrument Virtuel* (*Virtual Instrument* : VI).

b) Les éléments d'une application LabVIEW

Un programme ou VI, développé dans l'environnement LabVIEW, se compose principalement de deux éléments étroitement associés et regroupés sous le même nom. Ainsi nous avons :

- la « face-avant » qui représente le panneau de contrôle de l'instrument virtuel composé d'objets variés (boutons, indicateurs, graphes, etc.). Cette fenêtre est l'*interface utilisateur* du programme au sens génie logiciel : définition des entrées/sorties de données accessibles par l'utilisateur du programme (figure H.1). En imitant l'interface classique des appareils de mesures (générateur, oscilloscope...), LabVIEW apporte aussi une continuité pour les utilisateurs des appareils d'instrumentation. La réalisation de cette interface peut être effectuée de manière indépendante par rapport au programme. Ainsi, le langage LabVIEW peut être utilisé comme un outil d'aide à la conception ou un outil de prototypage.

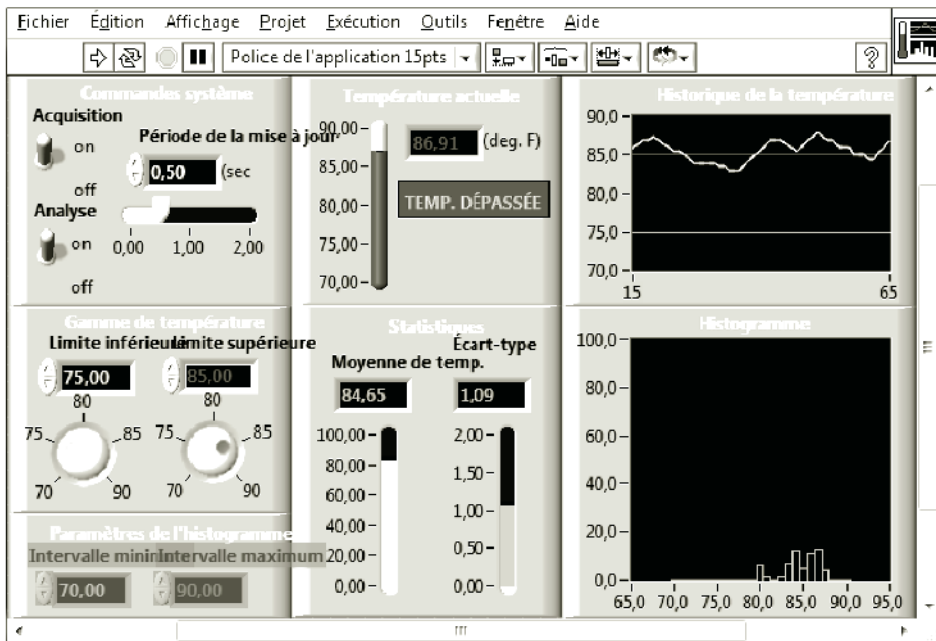


Figure H.1 Exemple d'une « face-avant » ou interface utilisateur d'une application développée dans l'environnement LabVIEW : mesure et analyse d'une température.

- le « diagramme » qui est le *programme* de l'application écrit sous la forme d'un diagramme flux de données en langage G : ensemble des icônes et des liaisons entre ces icônes utilisées (figure H.2, page suivante). Le diagramme contient les fonctions de l'instrument virtuel. Contrairement à la procédure qui consistait pour le technicien ou le scientifique à dessiner le schéma d'une application et ensuite à le convertir en un code propre au langage choisi, pour LabVIEW, le diagramme est le programme. Représenté en image, le programme s'explique de lui-même et est donc facile à adapter et à comprendre lorsque la représentation graphique garde une taille acceptable.

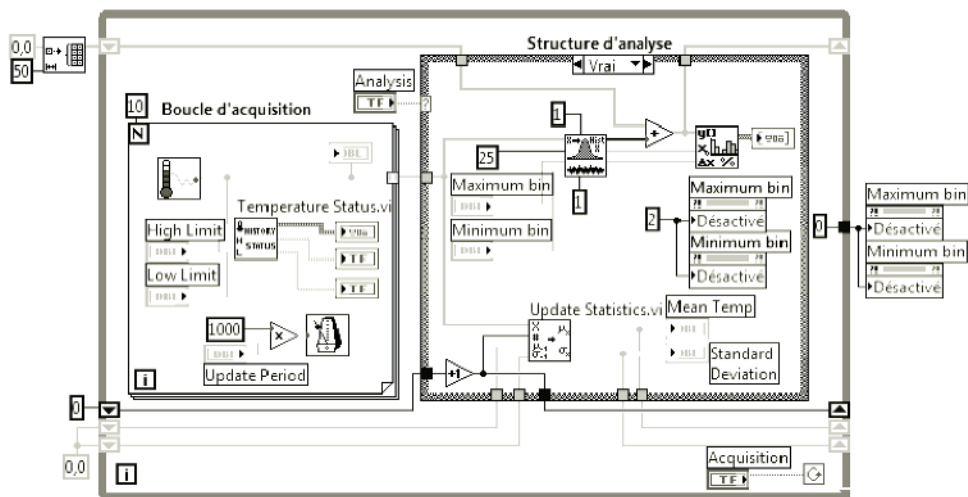


Figure H.2 Exemple du programme (diagramme flux de données) d'une application développée dans l'environnement LabVIEW : mesure et analyse d'une température.

Une application LabVIEW ou VI est en fait un module logiciel que l'on peut soit exécuter, soit inclure dans une autre application. En effet, lorsqu'une partie de l'application est réalisée et testée, il est possible de créer un nouvel objet graphique ou icône qui représente alors une fonction bien définie par son interface utilisateur (variables en entrée/sortie et fonctionnalité). Cette caractéristique montre que LabVIEW intègre le concept de programmation modulaire.

c) L'environnement de développement LabVIEW

Au lancement du logiciel LabVIEW, nous obtenons deux fenêtres de travail qui peuvent être activées l'une après l'autre (figure H.3). L'ensemble de ces deux fenêtres constitue l'Instrument Virtuel en création. Nous pouvons immédiatement noter la

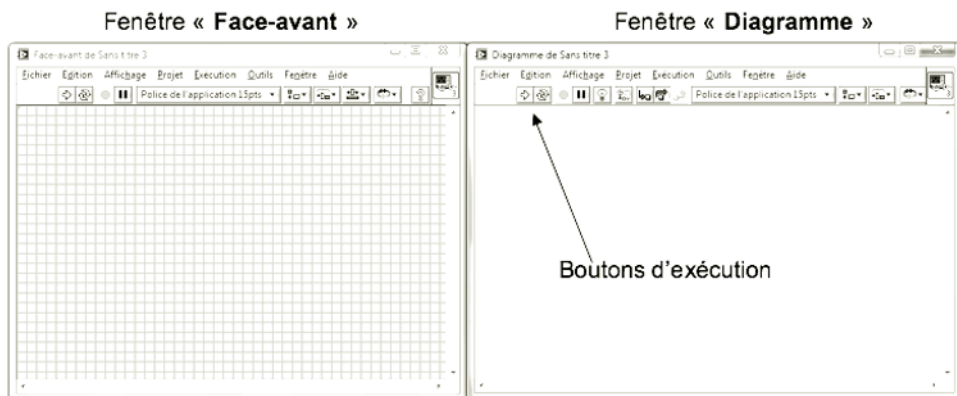


Figure H.3 Les deux fenêtres « Face-avant » et « Diagramme » en mode mosaïque constituant l'environnement de travail sous LabVIEW pour la création d'un nouvel Instrument Virtuel.

présence d'une barre des menus spécifiques à cet environnement et un ensemble de boutons, destinés à la gestion de l'exécution d'un VI.

La réalisation de la « face-avant » ou interface utilisateur du programme se fait à partir de la fenêtre ou palette des objets appelée « Commandes » qui est uniquement accessible dans la fenêtre « face-avant ». Elle permet d'accéder à l'ensemble des objets représentant les entrées/sorties du programme (figure H.4).

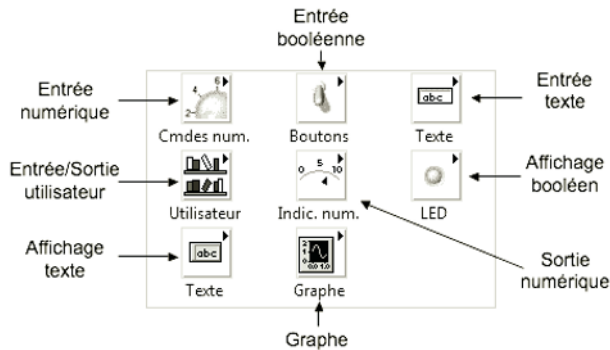


Figure H.4 Figure H.4. Palette des objets d'entrées/sorties disponibles dans la fenêtre « face-avant » d'un VI LabVIEW.

La réalisation du « diagramme » ou programme se fait à partir de la fenêtre ou palette appelée « Fonctions ». Cette palette est uniquement accessible dans la fenêtre « diagramme ». Elle permet d'accéder à l'ensemble des objets représentant les instructions ou fonctions du langage permettant de constituer le programme LabVIEW (figure H.5).

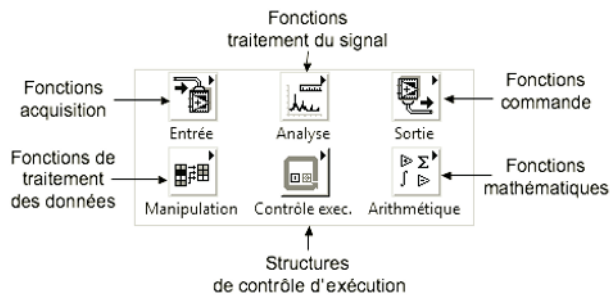


Figure H.5 Palette des fonctions disponibles dans la fenêtre « diagramme » d'un VI LabVIEW.

Dans cette palette, nous trouvons en particulier toutes les fonctions permettant de mettre en place des applications de traitement des signaux et de l'acquisition de données. Soient, par exemple, les sous-palettes suivantes :

- *Fonctions « acquisition »* : ce sous-menu offre toutes les fonctions pour gérer les entrées/sorties de type analogique ou numérique, les compteurs, pour étalonner et configurer les cartes et enfin pour faire du conditionnement de signaux (thermocouples, jauges de contraintes...) ;

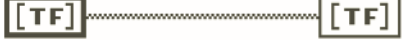
- *Fonctions « commande »* : gestionnaires d'instruments (liste très importante livrée sous forme d'un CD-ROM spécifique avec l'environnement LabVIEW), gestion du bus GPIB 488, de la liaison série et gestion d'instruments de différents types (oscilloscope, multimètre...);
- *Fonctions « traitement du signal »* : fonctions de traitement du signal, de mathématiques et fonctions de traitement adaptées pour le type de données « mesures » (Waveform).

H.3 LES PRINCIPAUX ÉLÉMENTS DU LANGAGE

d) Représentation des données

Le langage LabVIEW est un langage de programmation avec un typage fort. Les types de données qu'il est possible d'utiliser avec l'environnement labVIEW sont très nombreux : numérique (entier, réel ou complexe), booléen, chaîne de caractères, tableau, cluster, énuméré, ou autre (« mesures », etc.). Comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, les données sont transportées d'un nœud à un autre nœud du diagramme flux de données par des fils de liaison. Afin de pouvoir reconnaître aisément le type de données d'un fil ou d'un nœud d'entrée ou de sortie, la couleur, la forme et le symbole interne sont spécifiques à chaque type de données (tableau H.1).

Tableau H.1 Exemples des différents types de données.

Flux de données	Type de données	Couleur
	Numérique à virgule flottante	Orange
	Numérique entier	Bleu
	Booléen	Vert
	Chaîne de caractères	Rose
	Tableau de numériques à virgule flottante	Orange
	Tableau de booléens	Vert
	Cluster de données du même type	Marron
	Cluster de données de types différents	Rose
	Type énuméré	Bleu
	Chemin d'accès à des fichiers	Turquoise
	Données « mesures » (Waveform)	Marron

e) Structures de programmation

Le langage LabVIEW possède les deux structures de base qui permettent d'exprimer tous les algorithmes : la structure de répétition (ou séquence) et la structure conditionnelle. Étant donné le parallélisme implicite des programmes flux de données, une structure de séquencement a été ajoutée à ce langage. Ainsi, la structure de répétition étant déclinée classiquement en deux types (For/« Pour » et While/« Tant Que »), nous avons la possibilité d'utiliser quatre structures (figure H.6). Toutes les icônes et tous les flux de données, placés à l'intérieur du *cadre* formant la structure de contrôle, sont considérés comme propre à la structure de contrôle et donc soumis à son évolution (itération, exécution conditionnelle et séquencement).

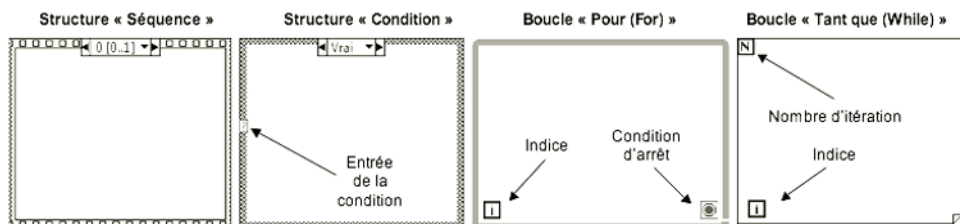


Figure H.6 Représentation des quatre structures de contrôle disponibles dans LabVIEW.

f) Exemples des fonctions de traitement du signal

La sous-palette spécifique du traitement du signal intègre les ensembles de fonctions suivantes (figure H.7) :

- Génération de signaux : création et synthèse de signaux comme un signal sinusoïdal, un signal impulsionnel, un signal de rampe, un signal triangulaire, un signal pic de Dirac, un bruit blanc, etc. ;

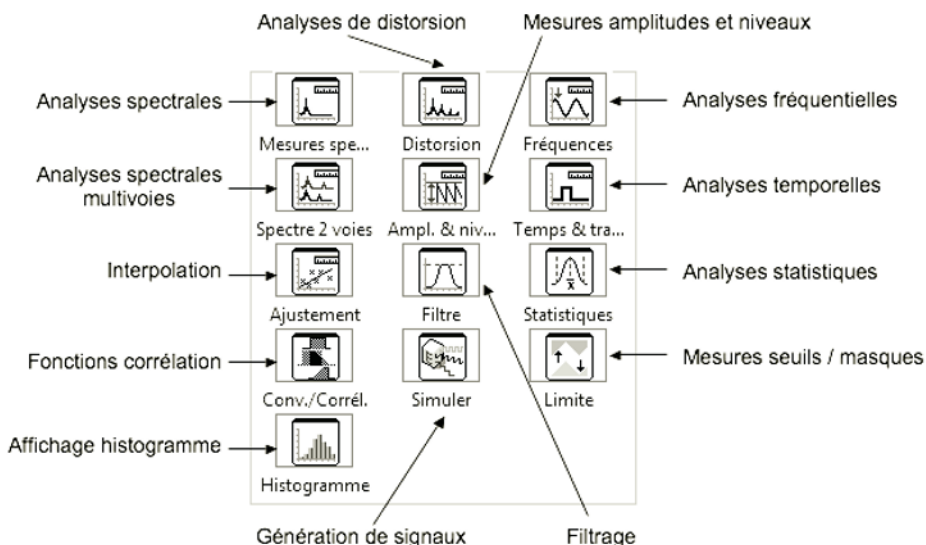


Figure H.7 La sous-palette « Traitement du signal » de la palette générale « Fonctions ».

- Analyses temporelles : traitement des signaux dans le domaine temporel comme la convolution, la déconvolution, l'autocorrélation, la corrélation, l'intégration, la dérivation, la décimation, la détection de pics, etc. ;
- Analyses fréquentielles : traitement des signaux dans le domaine fréquentiel comme la transformée de Fourier (FFT), la transformée de Hilbert, l'analyse harmonique, etc. ;
- Filtrage : utilisation de filtres numériques comme les filtres de Butterworth, les filtres de Chebyshev ; les filtres de Bessel, etc. Cette sous-palette permet d'accéder à d'autres palettes offrant des filtres plus élaborés à une réponse impulsionnelle infinie (RII) ou à une réponse impulsionnelle finie (RIF).

H.4 UN EXEMPLE DE PROGRAMME LABVIEW

Considérons un programme utilisé pour faire l'étude du fenêtrage temporel. La fenêtre de la « face-avant », présentée sur la figure H.8, donne un exemple d'exécution du programme avec les fenêtres de Hanning et Hamming. La commande correspondant à l'entrée du choix de la fenêtre temporelle est une commande de type « menu déroulant » avec un ascenseur vertical. Comme le montre la figure H.9, page suivante, le diagramme ou programme est très simple.

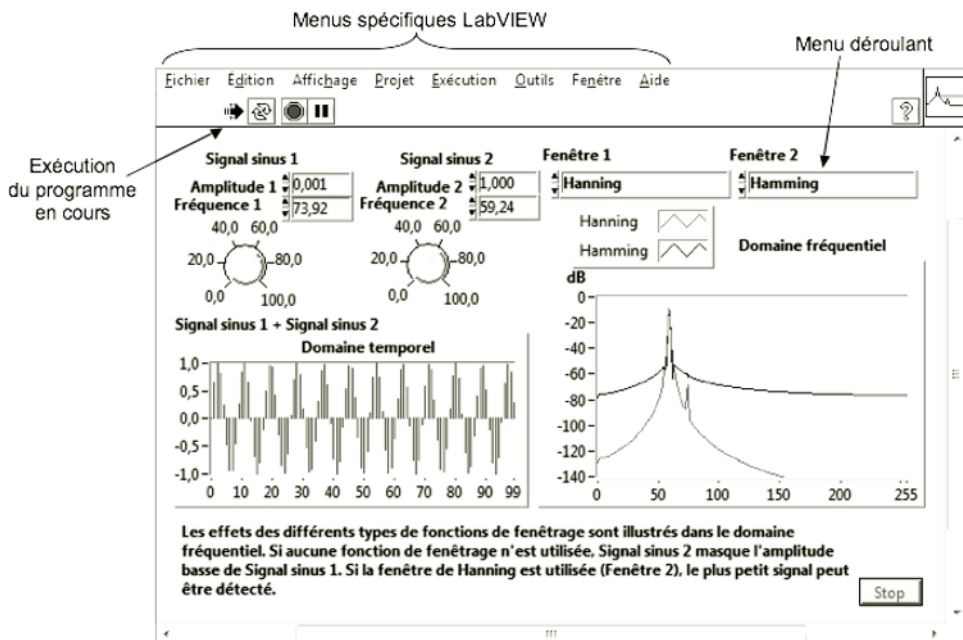


Figure H.8 « face-avant » de l'exemple de l'analyse spectrale d'un signal sinusoïdal.

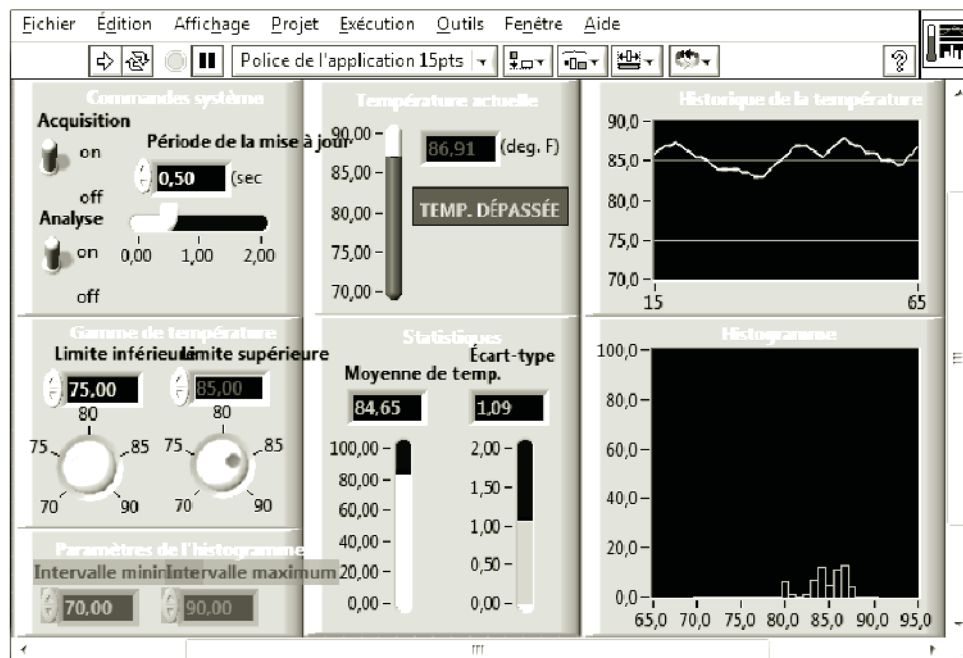


Figure H.9 « Diagramme » de l'exemple de l'analyse spectrale d'un signal sinusoïdal.

Annexe I

Rappels mathématiques pour le traitement du signal

I.1 NOTATIONS COMPLEXES

Soit j le symbole « imaginaire pur », nous pouvons écrire le complexe z sous la forme cartésienne :

$$z = x + j \cdot y$$

En définissant le module $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et l'argument $\theta = \arctan(y/x)$, la notation polaire s'exprime sous la forme suivante :

$$z = x + j \cdot y = r \cdot (\cos \theta + j \cdot \sin \theta) = r \cdot e^{j\theta}$$

Le complexe conjugué de z s'écrit $\bar{z}$ avec :

$$\bar{z} = x - j \cdot y = r \cdot (\cos \theta - j \cdot \sin \theta) = r \cdot e^{-j\theta}$$

Les notations complexe des fonctions circulaires sont :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \cdot [e^{j\theta} + e^{-j\theta}] \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot [e^{j\theta} - e^{-j\theta}]$$

d'où :

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta) \quad \text{et} \quad e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j \cdot \sin(\theta)$$

Notons quelques valeurs particulières :

$$e^{j \cdot (2 \cdot p + 1) \cdot \frac{\pi}{2}} = j \cdot (-1)^p, \quad e^{j \cdot n \cdot \pi} = (-1)^n \quad \text{et} \quad e^{j \cdot (2 \cdot p + 1) \cdot \pi} = -1$$

I.2 FORMULES TRIGONOMETRIQUES

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\text{et } \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\text{et } \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(2 \cdot a) = 2 \cdot \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 a \quad \text{et} \quad \cos^2 a = \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2 \cdot a)]$$

$$\sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2 \cdot a)]$$

I.3 FONCTIONS DE BESSEL

Les fonctions de Bessel de première espèce de la variable x et d'ordre n entier $J_n(x)$ peuvent être exprimées sous la forme intégrale suivante :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \cos(x \cdot \sin \alpha - x \cdot \alpha) \cdot d\alpha \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

Les principales propriétés des fonctions de Bessel sont :

- symétrie par rapport à l'axe des ordonnées : $J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$
- amplitude limitée : $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x) = 0$ ou $J_n(x) \approx 0$ pour $n > x$
- puissance bornée : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(x) = 1$

I.4 LOI DE PROBABILITÉS

Les variables aléatoires continues qui suivent une *loi de Gauss* sont très importantes car elles correspondent à de nombreux cas réels (sources de bruit usuelles, etc.). La fonction de distribution ou densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne x de moyenne m et d'écart type s s'écrit :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Cette fonction est entièrement déterminée par les deux paramètres m et s . Cette loi de probabilité peut être décrite par rapport à ces deux paramètres :

- la probabilité de trouver $x \in [m - s, m + s]$ est de 68,3 % ;
- la probabilité de trouver $x \in [m - 2s, m + 2s]$ est de 95,4 % ;
- la probabilité de trouver $x \in [m - 3s, m + 3s]$ est de 99,7 %.

Si on considère la variable aléatoire gaussienne centrée $x - m$, les moments d'ordre impair sont nuls et les moments d'ordre pair s'expriment à partir de s^2 :

$$E_{\text{sp}}[(x - m)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k(k!)} \cdot \sigma^{2k} \quad \text{et} \quad E_{\text{sp}}[(x - m)^{2k+1}] = 0$$

L'importance de cette loi de distribution tient surtout au *théorème central limite* qui s'énonce de la manière suivante : « si une variable aléatoire est la somme d'un très grand nombre de variables aléatoires indépendantes, ayant chacune une loi de distribution quelconque mais de faible amplitude par rapport à la somme (l'influence de chacune des contributions est faible), alors la distribution de la variable aléatoire globale est donnée par une loi gaussienne. »

Il est à noter que nous avons équivalence entre la propriété d'indépendance et un coefficient de corrélation r nul pour des variables aléatoires gaussiennes.

Les variables aléatoires discrètes qui suivent une *loi de Poisson* se retrouvent dans diverses applications (comptage de particules émises par une source radioactive, etc.). Étant donné la moyenne m , la fonction de distribution s'écrit :

$$p(x = k) = \frac{m^k}{k!} \cdot e^{-m}$$

Cette variable aléatoire x de valeur moyenne m a les caractéristiques suivantes :

$$E_{\text{sp}}[x^2] = m^2 + m \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{m}$$

Lexique

Anglais	Français
<i>Absolute accuracy</i>	Précision absolue (en LSB)
<i>Actuator</i>	Actionneur
<i>Aliasing</i>	Recouvrement de spectre
<i>Analog-to-digital converter</i>	Convertisseur analogique/numérique
<i>Band-pass filter</i>	Filtre passe-bande
<i>Bandwidth</i>	Bande passante
<i>Buffer</i>	Mémoire tampon
<i>Clock frequency</i>	Fréquence d'horloge
<i>Convolution</i>	Convolution
<i>Correlation</i>	Corrélation
<i>Counter/Timer</i>	Compteur/Temporisateur
<i>Crosscorrelation</i>	Intercorrélation
<i>Data acquisition</i>	Acquisition de données
<i>Differential inputs</i>	Entrées différentielles
<i>Differential non linearity</i>	Non linéarité différentielle
<i>Digital Signal Processor</i>	Processeur de traitement de signaux
<i>Digital-to-analog converter</i>	Convertisseur numérique/analogique
<i>Drift in time</i>	Dérive temporelle
<i>Fast Fourier Transform</i>	Transformée de Fourier rapide
<i>Flash converter</i>	Convertisseur parallèle
<i>Filter</i>	Filtre
<i>Flat top window</i>	Fenêtre de pondération à « toit plat »
<i>Folding frequency</i>	Fréquence de repliement
<i>Fourier transform</i>	Transformée de Fourier
<i>Frequency</i>	Fréquence
<i>Gaussian law</i>	Loi de Gauss
<i>Glitch</i>	Impulsion transitoire
<i>High-pass filter</i>	Filtre passe-haut
<i>Impulse, pulse</i>	Impulsion

Anglais	Français
<i>Impulse response</i>	Réponse impulsionnelle
<i>Ladder network</i>	Réseau en échelle (CNA)
<i>Least Significant Bit (LSB)</i>	Bit de poids faible
<i>Low-pass filter</i>	Filtre passe-bas
<i>Mean</i>	Moyenne
<i>Most Significant Bit (MSB)</i>	Bit de poids fort
<i>Multiplexer</i>	Multiplexeur
<i>Noise</i>	Bruit
<i>Offset voltage</i>	Tension de décalage
<i>Operating temperature</i>	Température de fonctionnement
<i>Output/Input voltage or current</i>	Tension ou courant de sortie/entrée
<i>Oversampling</i>	Sur-échantillonnage
<i>Overvoltage protection</i>	Protection contre les surtensions
<i>Phase lock loop (PLL)</i>	Boucle à verrouillage de phase
<i>Power dissipation</i>	Consommation (en Watt)
<i>Power requirements</i>	Besoins en alimentations continues
<i>Power spectrum</i>	Spectre en puissance
<i>Power supply</i>	Alimentation continue
<i>Ramp signal</i>	Signal de rampe
<i>Real time operating system</i>	Système d'exploitation temps réel
<i>Resolution</i>	Résolution (nb. bits)
<i>RMS value (RMS : root mean square)</i>	Valeur efficace
<i>Sample and Hold</i>	Échantillonneur/Bloqueur
<i>Sampling</i>	Échantillonnage
<i>Sawtooth signal</i>	Signal en « dent de scie »
<i>Sensor</i>	Capteur
<i>Settling time</i>	Temps de conversion ou d'établissement
<i>Shielded Twisted Pair</i>	Paire torsadée blindée
<i>Shot noise</i>	Bruit de grenaille
<i>Signal</i>	Signal
<i>Signal processing</i>	Traitement du signal
<i>Signal to noise ratio</i>	Rapport signal sur bruit
<i>Single ended signal</i>	Signal d'entrée simple
<i>Slew rate</i>	Taux de dérive
<i>Smoothing window</i>	Fenêtre de lissage ou de pondération
<i>Standard deviation</i>	Écart type
<i>Statistical distribution</i>	
<i>Switch</i>	Interrupteur
<i>Threshold</i>	Seuil
<i>Unipolar/bipolar</i>	Unipolaire/bipolaire
<i>Variance</i>	Variance
<i>Voltage controlled oscillator (VCO)</i>	Oscillateur à fréquence commandée
<i>Voltage range</i>	Domaine de tensions
<i>Warmup time</i>	Temps de mise en température
<i>White noise</i>	Bruit blanc
<i>Window</i>	Fenêtre temporelle (Traitement du signal)
<i>Windowing</i>	Fenêtrage
<i>Wire</i>	Fil

Notations et abréviations

$x * y$	Produit de convolution
$\text{Arctan}(x)$	Fonction arctangente
$b(t)$	Signal « bruit »
$\cos(x)$	Fonction cosinusoidale
CAN	Convertisseur analogique-numérique
CCITT	Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique
CNA	Convertisseur numérique-analogique
$C_{xx}(t)$	Fonction d'autocorrélation
$C_{xy}(t)$	Fonction d'intercorrélation
e^x	Fonction exponentielle
$E_{\text{sp}}[x^n]$	Espérance de x^n ou moment d'ordre n de la variable x
f	Fréquence
F	Transformée de Fourier
FFT	Transformée de Fourier rapide
$g_{\text{fen}}(t)$	Fonction de la fenêtre de pondération
$h(t)$	Réponse impulsionnelle ou percussive d'un filtre
$H(f), H(p)$ ou $H(z)$	Fonction de transfert d'un filtre
$J_n(x)$	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre n
L	Transformée de Laplace
$\log(x)$	Fonction logarithme à base 10
$\text{Ln}(x)$	Fonction logarithme népérien

m	Moyenne temporelle
MIC	Modulation par impulsion et codage
MOS	Technologie des composants à faible consommation
OMA	Onde modulée en amplitude
OMF	Onde modulée en fréquence
p	Fréquence complexe (opérateur de Laplace)
$\text{Pgn}_{T_0}(x)$	« Peigne » de Dirac (suite de pic de Dirac)
q	Quantum de conversion
RAZ	Remise à zéro
$s(t)$	Signal temporel
$\bar{s}(t)$	Complexe conjugué de la variable $s(t)$
$\overline{s(t)}$	Moyenne temporelle du signal $s(t)$
$s_e(t)$	Signal temporel échantillonné
$s_{e,\Pi}(t)$	Signal temporel échantillonné tronqué ou limité temporellement
$S(f)$	Transformée de Fourier du signal $s(t)$
$S_e(f)$	Transformée de Fourier du signal échantillonné $s_e(t)$
$S_{e,\Pi}(f)$	Transformée de Fourier du signal échantillonné tronqué $s_{e,\Pi}(t)$
$\sin(x)$	Fonction sinusoïdale
$\text{sinc}(x)$	Fonction sinus cardinal $[\sin(\pi x)/(\pi x)]$
$s_{\text{ind}}(t)$	Réponse indicielle (réponse au signal $u(t)$)
$S_{xx}(f)$	Densité spectrale ou spectre en puissance
$S_{xy}(f)$	Densité spectrale d'interaction
t	Temps
T_z	Transformée en z
TFD	Transformée de Fourier discrète
$T_e (= 1/F_e)$	Période d'échantillonnage d'un signal
$T_0 (= 1/F_0)$	Période d'un signal
VCO	Oscillateur à fréquence commandée
V_e	Tension d'entrée
V_s	Tension de sortie
w_N^{mk}	Fonction $e^{-j2\pi km/N}$
$\delta(x)$	Pic de Dirac
$\Lambda_\tau(t)$	Fonction triangle de base égale à τ
ω, Ω	Pulsation ($= 2\pi f$)
$\Pi_\tau(x)$	Fonction « porte » de largeur τ
σ_x	Écart type de la variable x

Bibliographie

Les références bibliographiques, listées ci-après, correspondent aux ouvrages utilisés pour l'élaboration des différentes parties de ce livre. D'autres sources bibliographiques non référencées, souvent difficilement accessibles, ont été utilisées comme des articles de congrès, des publications de revues spécialisées ou des rapports internes de laboratoires ou d'entreprises.

- AMAT J.-L., YAHIAOUI G. — *Techniques avancées pour le Traitement de l'Information*. CÉPA-DUÈS, 1996.
- ASH G. et al. — *Les capteurs en instrumentation industrielle*. DUNOD, 1991.
- ASH G. et al. — *Acquisition de données. Du capteur à l'ordinateur*. DUNOD, 1999.
- BELLANGER M. — *Traitement numérique du signal*. DUNOD, 1998.
- BELLANGER M. — *Analyse des signaux et filtrage numérique adaptatif*. MASSON, 1989.
- COTTET F. — *LabVIEW : programmation et applications*. DUNOD, 2001.
- COTTET F. — *Traitement du signal. Aide-mémoire*. DUNOD, 2000.
- DE COULON F. — *Théorie et traitement des signaux*. DUNOD, 1984.
- DELMAS J.P. — *Éléments de théorie du signal : les signaux déterministes*. ÉLLIPSES, 1991.
- DUVAUT P. — *Traitement du signal*. HERMES, (1994).
- GASQUET C., WITOMSKI P. — *Analyse de Fourier et applications*. MASSON, 1995.
- KUNT M. — *Traitement numérique des signaux*, DUNOD, 1981.
- MAX J., LACOUME J.M. — *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. DUNOD, 2000.
- MANNEVILLE F., ESQUIEU J. — *Systèmes bouclés linéaires, de communications et de filtrage*. DUNOD, 1990.
- PICINBONO B. — *Éléments de théorie du signal*. DUNOD Université, 1977.
- REINNHARD H. — *Cours de mathématiques du signal*. DUNOD Université, 1986.
- THOMAS Y. — *Signaux et systèmes linéaires*. MASSON, 1995.

Index

A

acquisition de données : 330, 336, 359
actionneur : 5, 236, 346
adaptation
 d'amplitude : 327
 de niveau : 273
 en puissance : 271
amplificateur à gain programmable : 314
amplification : 263
analyse fréquentielle : 175

B

bande
 latérale
 inférieure : 90
 supérieure : 90
 passante : 46, 74, 85, 241, 256
 à -3dB : 47
blindage : 260
bruit : 1, 128
blanc : 129, 139
 de fond : 128
 externe : 128
 interne : 128
 rose : 129
bus : 316
 PCI : 317

C

câblage : 254
câble : 86
 coaxial : 257
 plat : 256

capteur : 5, 236, 241, 337, 346
 à variation de capacité : 250
 de température : 249
 extensométrique : 248
 inductif : 251
 intrusif : 243
 piézo-électrique : 250
 potentiométrique : 246
carte
 compteur/timer : 321
 d'acquisition : 321, 338, 347
 d'entrées/sorties numériques : 322
 de sorties analogiques : 322
 multifonction : 321
chaîne d'acquisition de données : 311, 323
classification des signaux : 12
codage
 binaire codé décimal : 240
 binaire simple : 239
 complément à 2 : 239
 de l'information : 238
compandeur : 159
compensation : 246
composante continue : 20
conditionnement des signaux : 263, 320
conversion
 analogique-numérique : 238, 292
 numérique-analogique : 282
 tension-durée : 294
convertisseur
 à approximations successives : 298
 à comptage : 297
 à intégration simple rampe : 294
 à réseau en échelle R-2R : 285

- à résistances pondérées : 283
- A/N logarithmique : 302
- analogique-numérique : 16, 156, 266
- double rampe : 295
- numérique-analogique : 16, 268
- parallèle : 299
- SIGMA-DELTA : 301
- convolution : 51
 - des signaux périodiques : 54
 - discrète : 188
- corrélation : 55, 131, 341
 - de signaux périodiques : 58
 - discrète : 189
- coupleur optoélectronique : 274
- D**
- décibel : 45
- décimation : 223
- démodulateur de fréquence : 111
- démodulation : 96, 115
 - d'enveloppe : 97
 - synchrone : 96
- densité
 - de probabilité : 125, 136
 - spectrale : 55, 56
- déphasage : 290
- dérivateur : 48
- désaccentuation : 104
- détection : 135
 - d'un signal noyé dans le bruit : 131
 - d'une onde modulée en fréquence : 110
 - linéaire : 97
 - synchrone : 134
- diagramme de Bode : 78, 82
- diode : 36, 95, 117, 259
 - à capacité variable : 110
 - de protection : 275
 - Zener : 276
- distribution de Dirac : 20

E

- écart
 - quadratique : 127
 - type : 127
- échantillonnage : 143
 - idéel : 145
 - moyenneur : 155

- naturel : 152
- régulier : 154, 163
- échantillonneur/bloqueur : 306
- échelon unité : 32
- élaboration des signaux : 3
- émetteur : 94
- émission radiophonique : 121
- énergie : 13
- entrée
 - analogique : 325
 - différentielle : 261
 - simple : 261
- entrée/sortie numérique : 326
- équation aux différences : 204, 210
- équivalence
 - de l'intégration : 215
 - de la dérivation : 214
- ergodique : 126, 137
- erreur
 - d'offset : 242
 - de commutation : 288
 - de décalage : 287
 - de gain : 287
 - de linéarité différentielle : 288
 - de quantification : 156, 293

F

- fenêtrage temporel : 66, 180, 190
- fenêtre
 - à « toit plat » : 195
 - de Bartlett : 193
 - de Blackman : 194
 - de Blackman exacte : 194
 - de Blackman-Harris : 194
 - de Hamming : 194
 - de Hanning : 194
 - exponentielle : 195
 - naturelle : 193
 - temporelle : 191
 - « triangulaire » : 193
- fibres optiques : 258, 274
- filtrage : 263, 276
 - fréquentiel : 70
 - passe-bas : 36
- filtre : 49, 51, 74, 362
 - à réponse impulsionnelle finie : 216, 302
 - analogique : 73
 - analogique programmable : 290

- anti-repliement : 169
 - coupe-bande : 75
 - de Butterworth : 75, 121
 - de la valeur médiane : 221
 - de restitution : 164
 - de Tchebychev : 75
 - non récursif : 204
 - numérique : 203, 302
 - à réponse impulsionnelle finie : 230
 - à réponse impulsionnelle infinie : 210
 - passse-bande : 74
 - passse-bas : 72-74, 77
 - anti-repliement : 150
 - passse-haut : 73, 74, 81, 276
 - réalisable : 72
 - récursif : 204
 - réjecteur : 74
 - sélecteur : 292
- fonction
- d'autocorrélation : 55, 129
 - statistique : 127
 - d'intercorrélration : 55, 60
 - de Bessel : 100
 - de Heaviside : 32
 - de transfert : 74, 210
 - exponentielle décroissante : 33
 - « porte » : 31, 67, 72, 152, 193
 - « signe » : 33
- fréquence : 15
- complexe : 63
 - d'échantillonnage : 147
 - de coupure : 74
 - de Nyquist : 147
 - de Shannon : 147
 - fantôme : 149, 151
- G**
- gain
- en puissance : 46
 - en tension : 46
- génération de signaux : 362
- I**
- identification d'un processus : 139
 - immunité aux bruits : 86
 - impulsion de Dirac : 20, 337
 - indice de modulation : 102, 108, 123
 - informatique industrielle : 6
 - intégrateur : 48
 - interchangeabilité des capteurs : 242
 - interface d'entrées/sorties numériques : 271
 - interpolation : 159, 223
 - idéale : 161
 - linéaire : 161
 - interprétation des signaux : 4
 - isolation : 325
 - isolement
 - électrique : 274
 - galvanique : 263
- L**
- LabVIEW : 118, 355
 - linéarisation : 246
 - lissage temporel : 207
- M**
- machine asynchrone : 254
 - masse : 260
 - méthode de l'invariance
 - impulsionnelle : 212
 - indicielle : 213
 - mode d'acquisition de données
 - circulaire : 330
 - continu : 330
 - simple : 329
 - modem : 108
 - modulateur
 - direct : 110
 - en anneau : 95
 - indirect de Armstrong : 109
 - modulation : 85
 - à bande latérale
 - résiduelle : 93
 - unique : 92
 - à porteuse supprimée : 92
 - angulaire : 98
 - avec sous-porteuse : 121
 - d'amplitude : 88, 117, 123, 136
 - de fréquence : 99, 103, 136
 - de phase : 136
 - en phase : 114
 - exponentielle : 98
 - moteur
 - à courant alternatif : 253

- à courant continu : 254
- électrique : 253
- pas à pas : 254, 341
- synchrone : 253
- moyenne temporelle glissante : 208
- multiplexage
 - des entrées analogiques : 318
 - des sorties
 - des convertisseurs : 317
 - des échantillonneurs/bloqueurs : 318
 - fréquentiel : 87
- multiplexeur : 313
- multiplieur analogique : 290

N

numérisation : 16, 168

O

onde porteuse : 87, 136

opérateur

- « papillon » : 183
- retard : 207

P

paire torsadée : 257

peigne de Dirac : 40, 44, 145

période d'échantillonnage : 143, 162

phase : 107, 114

- instantanée : 98

pic de Dirac : 20, 337

plan de Bode : 78

pont de diodes : 36

préaccentuation : 104

propriétés

- de la convolution : 51
- de la transformée de Fourier : 27

protection : 275

puissance : 13

- fréquentielle : 55
- instantanée : 54
- moyenne : 14, 54, 90
- temporelle : 54

Q

quantification : 143, 156

- du signal : 168

quantum de conversion : 281, 284

R

radiodiffusion : 90, 111, 121

rapport signal/bruit : 105, 130

récepteur : 96

réception : 115

réjecteur : 276

relais

- électromécanique : 271
- statique : 271

repliement de spectre : 149

réponse

- impulsionnelle : 49, 70, 72, 77, 82, 139, 205
- indicielle : 70, 79, 83

représentation

- fréquentielle : 175
- spectrale bilatérale : 22
- temporelle : 12
- unilatérale : 22

reproductibilité des capteurs : 242

résolution : 286, 325

- du capteur : 242

restitution : 16, 144

- du signal : 159
- par bloqueur : 163

retard temporel : 207

S

sensibilité du capteur : 242

série de Fourier : 19, 25, 89

signal : 1, 11

- à bande étroite : 15
- à énergie finie : 14
- à puissance moyenne finie : 15
- aléatoire : 12, 125
- aléatoire gaussien : 128
- analogique : 16, 324
- carré : 25, 35, 134
- causal : 32, 63
- certain : 12
- échantillonné : 16
- ergodique : 13
- logique : 16
- numérique : 16, 107, 324
- « porte » : 31, 33, 57
- quantifié : 16

- sinusoïdal : 23
 - redressé double alternance : 38, 39
 - redressé simple alternance : 36, 38
- stationnaire : 13
- triangulaire : 34, 134
- sortie analogique : 326
- spectre : 341
 - du signal : 15, 87
 - en fréquence : 20
- stationnaire : 126, 137
- suite périodique d'impulsions : 40, 43
- synthèse
 - des signaux : 34
 - du filtre numérique : 206
- système
 - continu : 48
 - de convolution : 51
 - de transmission : 45
 - linéaire : 47
 - stationnaire : 49

T

- taux
 - de modulation : 88
 - de réjection de mode commun : 262
- temporisation : 315
- temps
 - d'acquisition : 307
 - d'établissement : 286
 - d'ouverture : 307
 - de conversion : 286
- tension
 - d'entrée : 287
 - de mode commun : 262
 - de sortie : 287
- théorème
 - de Fourier : 19

- de l'échantillonnage : 147
- de la valeur finale : 65
- de la valeur initiale : 65
- de Parseval : 60
- de Plancherel : 51
- de Shannon : 147

- théorie du signal : 1

- thermistance : 249

- thermocouple : 244

- traitement

- de l'information : 2

- du signal : 2

- transformation

- adaptée : 214

- d'Euler : 214

- de Fourier : 19

- homographique : 215

- standard : 212

- transformée

- de Fourier : 26, 179

- discrète : 177

- rapide : 180, 328

- de Laplace : 63

- en z : 206

- transmission

- en bande de base : 87

- par modulation : 87

- transmittance : 210

V

- valeur

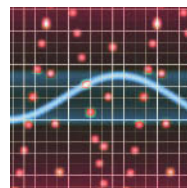
- maximale de la tension de sortie : 286

- moyenne : 20, 126

- quadratique moyenne : 126

- varistance : 276

- voie de transmission : 87



Francis Cottet

TRAITEMENT DES SIGNAUX ET ACQUISITION DE DONNÉES

Cours et exercices corrigés

Destiné aux étudiants de l'enseignement technique supérieur (STS, IUT, licence EEA, écoles d'ingénieurs...) et à tous les techniciens ou ingénieurs qui désirent développer une application de mesures, de tests ou de contrôle de procédé, cet ouvrage présente les bases du traitement des signaux et de l'acquisition des données, et expose les techniques de leur mise en œuvre.

L'ouvrage s'organise en trois grandes parties :

- le traitement des signaux analogiques,
- le traitement des signaux numériques,
- l'acquisition de données, où sont traités notamment le choix et la mise en œuvre d'une chaîne de mesures, partie complémentaire et indispensable du traitement des signaux.

L'aspect théorique du signal a volontairement été limité au strict nécessaire pour la compréhension des modèles utilisés.

De nombreux exercices et problèmes complets sont résolus afin de comprendre plus aisément les différentes notions introduites. Les nombreux exemples de l'ouvrage sont illustrés grâce au logiciel d'instrumentation industriel LabVIEW par ailleurs présenté succinctement en annexe.

Cette troisième édition ajoute aux précédentes de nouveaux exemples d'applications (pilotage d'une machine à compression, étude d'écoulements turbulents, interfaces dans les multimédiaux).

FRANCIS COTTET

est professeur des universités et directeur de l'ENSM (École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique) de Poitiers.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE